Ion CRĂCIUN Gheorghe BARBU

ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI CU DERIVATE PARŢIALE

Volumul 2

Ecuaţii cu derivate parţiale

Teorie, exemple şi exerciţii rezolvate.

Editura StudIS
adicenter@yahoo.com
Iasi, Sos. Stefan cel Mare, nr.5
Tel./fax: 0232 – 217.754

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
ION CRĂCIUN, GHEORGHE BARBU

Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale.
Vol. 2 Ecuaţii cu derivate parţiale / Ion Crăciun, Gheorghe Barbu - Vatra Dornei : StudIS, 2013

Bibliogr.
ISBN: 978-606-624-305-6
ISBN VOL.2 : 978-606-624-307-0

I. Ion Crăciun
II. Gheorghe Barbu

Consilier editorial: Dranca Adrian
Secretar editorial: Moroşanu Paul

Pre-press, tipar digital şi finisare:
S.C. ADI CENTER SRL
Şos. Ştefan ce Mare, nr. 5
Tel.: 217 754

Cuprins

0.1 Prefaţă

Cartea de faţă a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, ”Formarea cadrelor didactice universitare şi a studenţilor în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare–învăţare–evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competenţe performante şi practice pentru piaţa muncii”.

Finanţat din Fondul Social European şi implementat de către Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni şi Companii, Universitatea din Bucureşti, Universitatea Tehnică de Construcţii din Bucureşti, Universitatea ”Politehnica” din Bucureşti, Universitatea din Piteşti, Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iaşi, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea ”Dunărea de Jos” din Galaţi, Universitatea Tehnică din Cluj–Napoca, Universitatea ”1 Decembrie 1918” din Alba–Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operaţional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane – POSDRU şi se înscrie în domeniul major de intervenţie 1.2 Calitate în învăţământul superior.

Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerinţele pieţei muncii şi crearea de mecanisme şi instrumente de extindere a oportunităţilor de învăţare. Evaluarea nevoilor educaţionale obiective ale cadrelor didactice şi studenţilor legate de utilizarea matematicii în învăţământul superior, masterate şi doctorate precum şi analizarea eficacităţii şi relevanţei curriculelor actuale la nivel de performanţă şi eficienţă, în vederea dezvoltării de cunoştinţe şi competenţe pentru studenţii care învaţă discipline matematice în universităşi, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului.

Dezvoltarea şi armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigenţelor de pe piaţa muncii, elaborarea şi implementarea unui program de formare a cadrelor didactice şi a studenţilor interesaţi din universităţile partenere, bazat pe dezvoltarea şi armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne şi funcţionale pentru predarea–învăţarea–evaluarea în disciplinele matematice pentru învăţământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns materialul de faţă.

Formarea de competenţe cheie de matematică şi informatică presupune crearea de abilităţi de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială şi inserţie pe piaţa muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea şi sprijinirea elevilor şi studenţilor potenţial talentaţi la matematică. Totuşi, studiul matematicii a evoluat în exigenţe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare–învăţare–evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilităţii curriculei, însoţită de analiza metodelor şi instrumentelor folosite pentru identificarea şi motivarea studenţilor talentaţi la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerinţelor de masă, cât şi celor de elită.

Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societăţii în legătură cu rolul şi locul matematicii în educaţia de bază în instrucţie şi în descoperirile ştiinţifice menite să îmbunătăţească calitatea vieţii, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, şi nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmăreşte evidenţierea unor noi motivaţii solide pentru învăţarea şi studiul matematicii la nivelele de bază şi la nivel de performanţă; stimularea creativităţii şi formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise faţă de însuşirea aspectelor specifice din alte ştiinţe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter şi multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată pentru viitorii studenţi ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanţă a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Lucrarea reflectă eforturile autorilor în cadrul acestui proiect şi experienţa lor în predarea matematicii în general şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale în special la facultăţile de inginerie cu profil tehnic din Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iasi şi respectiv Universitatea din Piteşti.

Lucrarea îmbină în mod armonios prezentările teoretice cu exemple semnificative, facilitând studenţilor, cadrelor didactice, matematicienilor, inginerilor, cercetătorilor etc. cunoaşterea, aprofundarea şi utilizarea acestui foarte important domeniu al matematicilor, reprezentat de ecuaţiile cu derivate parţiale.

Autorii s–au străduit să realizeze un material de studiu unitar în domeniul ecuaţiilor cu derivate parţiale şi speră că această lucrare elaborată în cadrul proiectului mai sus menţionat va contribui la o mai bună întelegere şi asimilare a cunoştinţelor de matematică şi la aplicarea lor în practică.

Autorii

Capitolul 1

Sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi

1.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală

Forma generală a unui **sistem de n ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală** este

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{1.1}$$

Pentru un astfel de sistem se utilizează şi denumirea de *sistem diferenţial*.

Necunoscutele sistemului (1.1) sunt funcţiile reale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ care depind de variabila reală x şi sunt definite pe un intervalul real închis I. Funcţiile date f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sunt continue împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întâi în domeniul închis $I \times D$, unde $D \subset \mathbb{R}^n$. Funcţiile necunoscute ale unui sistem diferenţial sunt numite deseori *variabile dependente*, iar x se numeşte *variabilă independentă*.

Dacă se introduc funcţiile vectoriale

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \quad \mathbf{y}' = (y_1', y_2', \ldots, y_n'),$$

atunci sistemul diferenţial (1.1) se scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}).$$

1.1.1 Legătura cu ecuaţiile diferenţiale de ordinul n

Teorema 1.1.1. *Un sistem de forma (1.1) este echivalent cu o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul n sub formă normală.*

Demonstraţie. Fie dată o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul n sub formă normală

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Dacă introducem funcţiile necunoscute

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \cdots, \quad y_n = y^{(n-1)} \tag{1.3}$$

şi ţinem cont de ecuaţia (1.2) obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \cdots, \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{1.4}$$

Din modul cum a fost obţinut sistemul (1.4) se vede că dacă y este o soluţie a ecuaţiei (1.2), atunci $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este o soluţie a sistemului (1.4) şi reciproc, dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este o soluţie a sistemului (1.4), iar funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt cele din (1.3), atunci $y_1 = y$ este o soluţie a ecuaţiei (1.2).

Reciproc, să arătăm cum studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale de forma (1.1) se reduce la studiul unei ecuaţii diferenţiale de forma (1.2). Pentru simplificarea calculelor vom considera cazul $n = 3$. Fie deci sistemul diferenţial

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' = f_3(x, y_1, y_2, y_3). \end{cases} \tag{1.5}$$

Derivând prima ecuaţie din (1.5) în raport cu x, obţinem

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot y_3'. \tag{1.6}$$

Înlocuind în (1.6) pe y_1', y_2', y_3' cu expresiile lor (1.5), găsim

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, y_3), \tag{1.7}$$

unde

$$F_2(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot f_3.$$

Dacă derivăm acum ecuaţia (1.7) în raport cu x şi ţinem cont de (1.5), obţinem

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, y_3), \tag{1.8}$$

unde $F_3(x, y_1, y_2, y_3) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot f_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_3} \cdot f_3.$

Din prima ecuaţie a sistemului (1.5) şi din ecuaţia (1.7) se pot afla, în general, y_2 şi y_3 funcţie de x, y_1, y_1' şi y_1'', care înlocuite în (1.8), conduce la ecuaţia diferenţială de ordinul trei sub formă normală

$$y_1''' = F(x, y_1, y_1', y_1''),$$

ceea ce trebuia de demonstrat. **q.e.d.**

Exerciţiul 1.1.1. *Să se afle soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y. \end{cases}$$

Soluţie. Dacă derivăm prima ecuaţie, obţinem $y'' = z'$. Folosind a doua ecuaţie, găsim $y'' + y = 0$. Această ecuaţie este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi omogenă, care are ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$.

Ca atare, un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială $y'' + y = 0$ este format din soluţiile $y_1 = \cos x$ şi $y_2 = \sin x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale $y'' + y = 0$ este o combinaţie liniară de cele două soluţii fundamentale

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Din prima ecuaţie a sistemului găsim şi expresia lui z,

$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

şi astfel am obţinut soluţia generală a sistemului dat. ■

Exerciţiul 1.1.2. *Să se reducă sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases} \tag{1.9}$$

la o ecuaţie de ordin superior şi să se găsească apoi soluţia sa generală.

Soluţie. Procedând ca în reciproca Teoremei 1.1.1 se ajunge la ecuaţia diferenţială liniară de ordinul trei cu coeficienţi constanţi, omogenă

$$x''' - x = 0 \tag{1.10}$$

ce are ecuaţia caracteristică $r^3 - 1 = 0$ şi rădăcinile caracteristice

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Acestor rădăcini caracteristice le corespund soluţiile fundamentale

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos\frac{t\sqrt{3}}{2}, \quad x_3(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin\frac{t\sqrt{3}}{2}.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei (1.10) este

$$x = C_1\, e^t + e^{-\frac{t}{2}}\Big(C_2 \cos\frac{t\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin\frac{t\sqrt{3}}{2}\Big). \tag{1.11}$$

Folosind sistemul, constatăm că necunoscuta y se obţine derivând pe x, iar funcţia z se obţine derivându–l pe y. Se găseşte

$$\begin{cases} y = C_1 e^t - \dfrac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\Big[(C_2 - C_3\sqrt{3})\cos\dfrac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_2\sqrt{3})\sin\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big], \\ z = C_1 e^t - \dfrac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\Big[(C_2 + C_3\sqrt{3})\cos\dfrac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 - C_2\sqrt{3})\sin\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big]. \end{cases} \tag{1.12}$$

Soluţia generală a sistemului (1.9) este dată de (1.11) şi (1.12). ■

Exercițiul 1.1.3. *Folosind* ***metoda eliminării*** *să se determine ecuația diferențială liniară de ordinul trei cu care este echivalent sistemul*

$$\begin{cases} y_1' + 9y_1 + 12y_2 + 5y_3 = 0, \\ y_2' - 5y_1 - 6y_2 - 3y_3 = 0, \\ y_3' - y_1 - 4y_2 - y_3 = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Folosind rezultatul stabilit, să se integreze sistemul (1.13).

Soluție. Derivăm prima egalitate din (1.13) și în rezultatul obținut, $y_1'' = -9y_1' - 12y_2' - 5y_3'$, înlocuim y_1', y_2', y_3' cu valorile date în (1.13). Găsim

$$y_1'' = 16y_1 + 16y_2 + 4y_3. \tag{1.14}$$

Procedând similar cu egalitatea (1.14), deducem

$$y_1''' = -60y_1 - 80y_2 - 28y_3. \tag{1.15}$$

Considerăm sistemul format din prima ecuație a sistemului inițial (1.13) și ecuația (1.14)

$$\begin{cases} 12y_2 + 5y_3 = -9y_1 - y_1', \\ 16y_2 + 4y_3 = -16y_1 + y_1'', \end{cases} \tag{1.16}$$

în care necunoscutele sunt y_2 și y_3.

Rezolvând sistemul algebric (1.16), găsim

$$\begin{cases} y_2 = -\dfrac{11}{8}y_1 + \dfrac{1}{8}y_1' + \dfrac{5}{32}y_1'', \\ y_3 = \dfrac{3}{2}y_1 - \dfrac{1}{2}y_1' - \dfrac{3}{8}y_1''. \end{cases} \tag{1.17}$$

Valorile lui y_2 și y_3 determinate în (1.17) le înlocuim în ecuația (1.15) și astfel găsim că y_1 este soluție a ecuației diferențiale liniară și omogenă, de ordin trei, cu coeficienți constanți

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0. \tag{1.18}$$

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (1.18) este

$$r^3 + 2r^2 - 4r - 8 = 0,$$

rădăcinile sale fiind $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = -2$. Rădăcinii caracteristice simple $r_1 = 2$ îi corespunde soluția $y^{(1)}(x) = e^{2x}$, iar celei duble îi corespund soluțiile $y^{(2)} = e^{-2x}$ și $y^{(3)} = x\,e^{-2x}$.

Soluțiile astfel determinate formează un sistem fundamental de soluții al ecuației diferențiale (1.18), deci soluția sa generală este

$$y(x) = C_1y^{(1)}(x) + C_2y^{(2)}(x) + C_3y^{(3)}(x).$$

Prin urmare, expresia lui y_1 este

$$y_1 = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3x)e^{-2x}, \tag{1.19}$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt constante reale arbitrare.

Pentru determinarea funcțiilor necunoscute y_2 și y_3 folosim expresiile (1.17), unde înlocuim pe y_1, y_1' și y_1'' așa cum rezultă din (1.19). Găsim

$$\begin{cases} y_2 = -\dfrac{1}{2}C_1e^{2x} - (C_2 + \dfrac{1}{2}C_3 + C_3x)e^{-2x}, \\ y_3 = -C_1e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3x)e^{-2x}. \end{cases}$$

Prin urmare, soluţia generală a sistemului (1.13) este

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^{-2x}, \\ y_2 = -\dfrac{1}{2}C_1 e^{2x} - (C_2 + \dfrac{1}{2}C_3 + C_3 x)e^{-2x}, \\ y_3 = -C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3 x)e^{-2x}. \end{cases}$$

■

Exerciţiul 1.1.4. *Să se integreze sistemul diferenţial liniar de ordinul întâi omogen cu coefcienţi constanţi*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_2' = -y_1 \qquad - 2y_3, \\ y_3' = \ \ y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases} \tag{1.20}$$

Soluţie. Aplicând demonstraţia reciprocei Teoremei 1.1.1, suntem conduşi la ecuaţia

$$y_1'' = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3. \tag{1.21}$$

Derivând această egalitate şi înlocuind derivatele din membrul al doilea, obţinem

$$y_1''' = 12y_1 + 11y_2 + 14y_3. \tag{1.22}$$

Cu prima ecuaţie a sistemului diferenţial (1.20) şi ecuaţia (1.21) alcătuim sistemul

$$\begin{cases} y_2 + 2y_3 = y_1' - 2y_1, \\ 4y_2 + 6y_3 = y_1'' - 5y_1, \end{cases}$$

din care se determină funcţiile necunoscute y_2 şi y_3 în funcţie de y_1 şi derivatele y_1', y_1''

$$\begin{cases} y_2 = \quad y_1'' - 3y_1' + y_1, \\ y_3 = -\dfrac{1}{2}y_1'' + 2y_1' - \dfrac{3}{2}y_1. \end{cases} \tag{1.23}$$

Introducerea expresiilor lui y_2 şi y_3 din (1.23) în egalitatea (1.22) conduce la ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al treilea, omogenă şi cu coeficienţi constanţi

$$y_1''' - 4y_1'' + 5y_1' - 2y_1 = 0, \tag{1.24}$$

a cărei ecuaţie caracteristică,

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$$

are rădăcina dublă $r_1 = r_2 = 1$ şi rădăcina simplă $r_3 = 2$. Acestor rădăcini caracteristice le corespund sistemul fundamental de soluţii:

$$y_1^{(1)} = e^x; \quad y_1^{(2)} = x\,e^x; \quad y_1^{(3)} = e^{2x}. \tag{1.25}$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.24) este combinaţia liniară de soluţiile sistemului fundamental de soluţii (1.25)

$$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x}. \tag{1.26}$$

Celelalte două necunoscute ale sistemului (1.20) se determină din (1.23)

$$\begin{cases} y_2 = (-C_1 - C_2 - C_2 x)e^x - C_3 e^{2x}, \\ y_3 = C_2 e^x + \dfrac{1}{2} C_3 e^{2x}. \end{cases} \tag{1.27}$$

Prin urmare, soluţia generală a sistemului (1.20) este reprezentată de funcţiile date în (1.26) şi (1.27). ■

Observaţia 1.1.1. *Rezultatele stabilite pot fi obţinute într–un alt mod din care rezultă o nouă metodă de rezolvare a sistemelor diferenţiale de tipul* (1.20) *şi anume* **metoda valorilor şi vectorilor proprii**.

1.1.2 Integrale prime. Soluţie generală

În ipotezele menţionate pentru funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se poate demonstra că există o soluţie unică a sistemului (1.1) care, pentru $x = x_0$, ia valorile prescrise

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{1.28}$$

unde $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ este un punct arbitrar din interiorul mulţimii $I \times D$.

Fie această soluţie

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ y_2 = \varphi_2(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \\ \cdots, \\ y_n = \varphi_n(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}). \end{cases} \tag{1.29}$$

Această formă a soluţiei pune în evidenţă *dependenţa* sa de *datele iniţiale* $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$.

Geometric, (1.29) reprezintă ecuaţiile parametrice ale unei *curbe* Γ în spaţiul liniar n dimensional $\mathbb{R}^n$, care trece prin punctul $M_0(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$. Curba Γ se numeşte *curbă integrală* sau *traiectorie* a sistemului diferenţial (1.1). Punctul $M_0 \in \Gamma$ se numeşte *punct iniţial*.

Fie acum un punct oarecare $M(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Gamma$, diferit de M_0, corespunzător valorii $x \in (a, b)$. Valorile $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt legate prin relaţiile (1.29).

Dacă schimbăm rolurile punctelor M_0 şi M, deci M devine punct iniţial, $M_0 \in \Gamma$ fiind variabil, în baza unicităţii soluţiei, curba integrală care trece prin M trece şi prin M_0. Prin urmare, avem

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = \varphi_1(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2^{(0)} = \varphi_2(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdots, \\ y_n^{(0)} = \varphi_n(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{1.30}$$

Relaţiile (1.30) arată că sistemul (1.29) s–a putut rezolva unic în raport cu valorile iniţiale $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, iar funcţiile din membrul drept admit derivate parţiale continue în raport cu $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Cum datele iniţiale se pot alege arbitrar în interiorul lui D, notându–le în (1.30) cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (constante arbitrare), obţinem ansamblul de relaţii

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2, \\ \cdots, \\ \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_n, \end{cases} \tag{1.31}$$

unde $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varphi_i(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, iar x_0 este dat.

Dar relaţiile (1.31) pot fi rezolvate în mod unic în raport cu variabilele y_1, $y_2, \ldots$, y_n, deci

$$\begin{cases} y_1 = \overline{\varphi}_1(x; C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 = \overline{\varphi}_2(x; C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots, \\ y_n = \overline{\varphi}_n(x; C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \tag{1.32}$$

Relaţiile (1.31) reprezintă *soluţia generală sub formă implicită* a sistemului (1.1). În loc de soluţie generală se utilizează şi termenul de *ansamblu de integrale prime* sau *integrală generală* a sistemului. Oricare din ecuaţiile (1.31) se numeşte *integrală primă* a sistemului (1.1).

Soluţia generală a sistemului diferenţial (1.1), sub formă explicită, este dată de relaţiile (1.32).

Din modul cum au fost deduse relaţiile (1.31) constatăm că o funcţie $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este integrală primă numai dacă $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ verifică sistemul (1.1).

Astfel, putem da două definiţii echivalente pentru integrala primă a unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi.

Definiţia 1.1.1. *Se numeşte* **integrală primă** *a sistemului de ecuaţii diferenţiale (1.1) orice relaţie obţinută rezolvând în raport cu constantele arbitrare soluţia lui generală (1.32).*

Aşadar, oricare din relaţiile (1.31) este o integrală primă a sistemului (1.1).

În baza existenţei şi unicităţii unei soluţii a sistemului (1.1) care trece printr–un punct dat din interiorul mulţimii $I \times D$, rezolvarea în raport cu constantele arbitrare a relaţiilor (1.32) este întotdeauna posibilă.

Definiţia de mai sus poate fi dată numai după ce se cunoaşte soluţia generală a sistemului.

Definiţia 1.1.2. *Funcţia* $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : [a, b] \times D \to \mathbb{R}$ *este o* **integrală primă** *a sistemului (1.1) pe o submulţime deschisă* Ω *a mulţimii* $[a, b] \times D$, *dacă* ψ *este de clasă* $C^1(\Omega)$, *nu este identic constantă dar*

$$\psi(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \psi_n(x)) \equiv \ \textit{constant},$$

de–a lungul oricărei traiectorii $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ *a sistemului (1.1).*

Observaţia 1.1.2. *Cu Definiţia 1.1.2 putem spune că un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi admite o infinitate de integrale prime deoarece funcţia*

$$\Phi[\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)],$$

unde Φ *este o funcţie arbitrară de integralele prime* ψ_i, *este la rândul ei o integrală primă a sistemului (1.1).*

Teorema 1.1.2. *Rezolvarea sistemului (1.1) este echivalentă cu obţinerea a* n *integrale prime independente.*

Demonstraţie. Fie n integrale prime (1.31) independente funcţional, deci pentru care determinantul funcţional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0.$$

Aplicând teorema de existenţă şi unicitate a sistemelor de funcţii definite implicit [13], din (1.31) deducem relaţiile (1.32) care constituie soluţia generală a sistemului. **q.e.d.**

Observaţia 1.1.3. *Cunoaşterea unei singure integrale prime a sistemului (1.1) reduce rezolvarea sistemului la $n-1$ ecuaţii cu $n-1$ funcţii necunoscute.*

Într-adevăr, din $\psi_1(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$ se poate exprima una din funcţiile necunoscute, de exemplu y_n, în funcţie de $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ şi C

$$y_n = (x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, C).$$

Înlocuindu–l în primele $n-1$ ecuaţii ale sistemului (1.1) obţinem un sistem de $n-1$ ecuaţii diferenţiale cu $n-1$ funcţii necunoscute. ■

Observaţia 1.1.4. *Sistemul (1.1) este echivalent cu sistemul*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n}. \tag{1.33}$$

Acest sistem este echivalent la rândul său cu cel obţinut prin înmulţirea rapoartelor cu un acelaşi factor, care poate fi funcţie de $n+1$ variabile, şi anume $x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$.

În cele ce urmează considerăm că numărul variabilelor este n şi că sunt notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar una dintre ele este dependentă de celelalte $n-1$, ceea ce înseamnă că putem scrie sistemul de ecuaţii diferenţiale în forma

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})}, \tag{1.34}$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, care se numeşte *forma simetrică* a sistemului de $n-1$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu $n-1$ necunoscute.

1.2 Sisteme diferenţiale sub formă simetrică

Să considerăm sistemul simetric (1.34) în care funcţiile X_i sunt continue şi au derivate parţiale continue în raport cu toate variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Conform paragrafului precedent, soluţia generală a sistemului simetric (1.34) este ansamblul

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \\ \cdots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}, \end{cases} \tag{1.35}$$

format din $n-1$ integrale prime oarecare independente funcţional, în sensul că rangul matricei jacobiene al funcţiilor $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ este egal cu $n-1$ în interiorul mulţimii de existenţă a funcţiilor $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Dacă dorim să trecem un sistem de la forma simetrică (1.34) la forma normală, este suficient să alegem una din variabile, de exemplu x_n, ca variabilă independentă. În acest fel, din (1.34) avem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_n} = \dfrac{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \\ \cdots, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{X_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \end{cases} \tag{1.36}$$

Observaţia 1.2.1. *Pentru valorile iniţiale $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, valoarea funcţiei X_n nu trebuie să se anuleze. Dacă acest lucru nu este posibil, alegem altă variabilă independentă.*

Teorema 1.2.1. *Relaţia*

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \tag{1.37}$$

este o integrală primă a sistemului simetric (1.34) dacă şi numai dacă, de–a lungul unei curbe integrale a sistemului (1.36), avem

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0, \tag{1.38}$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Demonstraţie. Dacă funcţia ψ din (1.37) este o integrală primă a sistemului (1.36), atunci de–a lungul unei curbe integrale a sistemului (1.36), $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are o valoare constantă, deci diferenţiala ei totală este nulă ceea ce conduce la

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0. \tag{1.39}$$

Deoarece de–a lungul unei curbe integrale diferenţialele dx_i sunt proporţionale cu valorile funcţiilor X_i (vezi (1.34)), avem (1.38).

Reciproc, din (1.38) rezultă (1.39) şi deci $d\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ de–a lungul unei curbe integrale, ceea ce este echivalent cu $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ constantă pentru orice soluţie a sistemului (1.36). **q.e.d.**

Observaţia 1.2.2. *Conform Definiţiei 1.1.1, ψ este o integrală primă a sistemului (1.36) sau a sistemului simetric (1.34).*

Observaţia 1.2.3. *Singurele funcţii reale de n variabile reale care verifică relaţia (1.38) sunt integralele prime ale sistemului (1.34).*

Din punct de vedere geometric, soluţia generală (1.35) reprezintă o familie de curbe obţinută prin intersecţia suprafeţelor $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Această familie de curbe este inclusă în intersecţia domeniilor de definiţie ale funcţiilor $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi depinde de $n-1$ parametri $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$.

Aducerea unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi la forma simetrică este indicată pentru aflarea integralelor prime şi, în consecinţă, pentru aflarea soluţiei sale generale.

Exerciţiul 1.2.1. *Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale sub formă normală*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2}, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}, \quad y \neq z \neq 0. \end{cases}$$

Soluţie. Forma simetrică a acestui sistem este

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Căutăm două combinaţii integrabile care să poată furniza cele două integrale prime independente.

O integrală primă se obţine din ultimele două rapoarte scrise în forma $ydy-zdz=0$ care implică $d(y^2-z^2)=0$ şi deci $y^2-z^2=C_1$ este prima integrală primă (o familie uniparametrică de cilindri hiperbolici cu generatoarele paralele cu axa Ox).

Cea de a doua integrală primă se va obţine după ce aplicăm o proprietate a şirului de rapoarte egale. Astfel, avem

$$\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dz-dy}{y-z}.$$

După simplificarea prin $y-z$ se obţine

$$dx+(y-z)d(y-z)=0,$$

care conduce la cea de a doua integrală primă $2x+(y-z)^2=C_2$ (familie uniparametrică de cuadrice).

Soluţia generală a sistemului, sub formă implicită, este dată de

$$\begin{cases} y^2-z^2=C_1, \\ 2x+(y-z)^2=C_2 \end{cases}$$

şi reprezintă o familie dublu parametrică de curbe în spaţiu. ■

Exerciţiul 1.2.2. *Să se determine soluţia generală a sistemului simetric*

$$\frac{dx}{2y(2a-x)}=\frac{dy}{x^2+z^2-y^2-4ax}=\frac{dz}{-2yz},$$

unde $a\in\mathbb{R}$, $x\neq 2a$, $y\neq 0$ *şi* $z\neq 0$.

Soluţie. Egalitatea rapoartelor extreme ne conduce la combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{x-2a}=\frac{dz}{z},$$

care dă integrala primă

$$\frac{x-2a}{z}=C_1.$$

Dacă scriem această egalitate în forma $x-C_1z-2a=0$, constatăm că integrala primă reprezintă o familie de plane paralele cu axa Oy.

O altă combinaţie integrabilă este

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{-y(x^2+y^2+z^2)}=\frac{dz}{-2yz}\quad\Longrightarrow\quad\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z},$$

din care se obţine cea de a doua integrală primă

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{z}=C_2.$$

Dacă scriem rezultatul găsit în forma $x^2+y^2+z^2-C_2z=0$, constatăm că cea de a doua integrală primă reprezintă o familie de sfere cu centrele pe axa Oz, tangente în origine planului xOy.

Soluţia generală a sistemului simetric este ansamblul celor două integrale prime

$$\begin{cases} \dfrac{x-2a}{z}=C_1, \\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z}=C_2. \end{cases}$$

Aşadar, curbele integrale sunt o familie dublu parametrică de cercuri în spaţiu. ■

Exerciţiul 1.2.3. *Să se găsească soluţia generală a sistemului simetric*

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

Soluţie. Din primele două rapoarte se obţine integrala primă

$$xy = C_1. \tag{1.40}$$

Vom căuta acum a doua combinaţie integrabilă. Efectuând raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor primelor două rapoarte, vom obţine un raport egal cu al treilea

$$\frac{dx+dy}{x^2-y^2} = \frac{-dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$$

După simplificarea cu $x-y$, se obţine

$$\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{-dz}{2x+2y+z}.$$

Efectuând diferenţa numărătorilor pe diferenţa numitorilor, obţinem un raport egal cu primul

$$\frac{dx+dy}{x+y} = -\frac{dx+dy+dz}{x+y+z},$$

din care deducem $\dfrac{dx+dy}{x+y} + \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z} = 0$. Integrând, obţinem

$$(x+y)(x+y+z) = C_2. \tag{1.41}$$

Soluţia generală a sistemului este ansamblul integralelor prime (1.40) şi (1.41). ■

1.3 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

În acest paragraf vom determina soluţiile sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi. Forma generală a unui astfel de sistem este

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)\,y_1 + a_{12}(x)\,y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\,y_n = f_1(x), \\ y_2' + a_{21}(x)\,y_1 + a_{22}(x)\,y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\,y_n = f_2(x), \\ \cdots, \\ y_n' + a_{n1}(x)\,y_1 + a_{n2}(x)\,y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\,y_n = f_n(x). \end{cases} \tag{1.42}$$

Presupunem că funcţiile a_{ij} şi f_i, $i,j=\overline{1,n}$, sunt continue pe intervalul $[a,b]$.

Dacă toţi $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1,2,\ldots,n$, spunem că sistemul este *omogen*. În caz contrar sistemul este *neomogen*.

Sistemul (1.42) se poate scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \tag{1.43}$$

unde $\mathbf{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie vectorială necunoscută, de variabilă reală, derivabilă, care în baza canonică din $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,\ldots,0), \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = (0,0,\ldots,1),$$

are coordonatele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^n$, $A(x) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ este o matrice cu elementele $a_{ij}(x)$, Y este matricea cu o singură coloană şi elemente coordonatele vectorului $\mathbf{y}$, adică $\mathbf{y} = \mathbf{e}Y$, iar $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este funcţie vectorială de o variabilă reală, cunoscută.

Definiţia 1.3.1. *Fie q un număr natural. Spunem că funcţia vectorială de variabilă reală $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ este de clasă $C^q([a,b])$ dacă funcţiile coordonate g_i, $i = \overline{1,n}$, sunt continue şi au derivate continue până la ordinul q inclusiv.*

Mulţimea $C^q([a,b])$ este spaţiu liniar real infinit dimensional. Pentru $C^0([a,b])$ vom folosi notaţia $C([a,b])$.

Definiţia 1.3.2. *Se numeşte* **soluţie** *a sistemului (1.43) funcţia vectorială de variabilă reală*

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) : [a,b] \to \mathbb{R}^n,$$

de clasă $C^1([a,b])$, care satisface egalitatea

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) + \mathbf{e}(A(x)\Phi(x)) = \mathbf{f}(x), \quad (\forall)\, x \in [a,b],$$

unde Φ este matricea coloană cu elementele $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

1.3.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene

Fie sistemul (1.43) şi să notăm

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y). \tag{1.44}$$

Atunci sistemul (1.43), în forma omogenă, se scrie

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \tag{1.45}$$

unde $\mathbf{0}$ este funcţia vectorială identic nulă $\mathbf{0} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.3.1. *Aplicaţia vectorială $\mathbf{L}$ este un operator liniar definit pe spaţiul vectorial $C^1([a,b])$ şi cu valori în spaţiul vectorial $C([a,b])$.*

Demonstraţie. Prima parte a teoremei este evidentă dacă avem în vedere expresia (1.44) a operatorului $\mathbf{L}$ şi continuitatea funcţiilor a_{ij}.

Se vede apoi că operatorul $\mathbf{L}$ are proprietatea

$$\mathbf{L}(\alpha\boldsymbol{\varphi} + \beta\boldsymbol{\psi}) = \alpha\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi}) + \beta\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi}), \tag{1.46}$$

oricare ar fi numerele α şi β, reale sau complexe, şi oricare ar fi funcţiile vectoriale de variabilă reală $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi} \in C^1([a,b])$. **q.e.d.**

A integra sistemul liniar şi omogen (1.43) de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi, cu coeficienţi variabili, înseamnă a găsi toate soluţiile lui. Observăm că dacă $\mathbf{y} \in C^1([a,b])$ este o soluţie a sistemului (1.45), atunci imaginea lui $\mathbf{y}$ prin operatorul $\mathbf{L}$ este elementul nul din $C([a,b])$. Prin urmare, mulţimea soluţiilor sistemului (1.45) coincide cu nucleul operatorului liniar $\mathbf{L}$, deci cu $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$.

Operatorul $\mathbf{L}$ fiind liniar, rezultă că $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este un spaţiu liniar, subspaţiu liniar al spaţiului liniar infinit dimensional $C([a,b])$.

Observaţia 1.3.1. *Dacă coeficienţii sistemului omogen (1.45) sunt funcţii reale, iar funcţia vectorială $\boldsymbol{\varphi} + i\boldsymbol{\psi}$ este o soluţie complexă a sistemului omogen (1.45), atunci funcţiile vectoriale de variabilă reală $\boldsymbol{\varphi}$ şi $\boldsymbol{\psi}$ sunt soluţii ale acestui sistem.*

Într-adevăr, din (1.46) rezultă

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi}+i\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi}) + i\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0},$$

deoarece $\boldsymbol{\varphi}+i\boldsymbol{\psi}$ este o soluţie a sistemului. Cum $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi})$ şi $\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi})$ sunt funcţii reale, deducem $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{0}$ şi $\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}$, adică funcţiile reale $\boldsymbol{\varphi}$ şi $\boldsymbol{\psi}$ sunt soluţii ale sistemului (1.45). ■

Să considerăm un punct oarecare $x_0 \in [a,b]$ şi $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ numere reale arbitrare.

Problema lui Cauchy[1] pentru sistemul (1.45) constă în determinarea acelei soluţii $\mathbf{y}$ a sistemului care să verifice *condiţia lui Cauchy* (*condiţia iniţială*)

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}, \tag{1.47}$$

unde $\mathbf{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Teorema de existenţă şi unicitate [35] a soluţiei problemei lui Cauchy pentru sistemul (1.45) pune în evidenţă un element $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \operatorname{Ker}\mathbf{L}$ care satisface condiţia (1.47).

Teorema 1.3.2. *Mulţimea* $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ *este un spaţiu vectorial real de dimensiune* n.

Demonstraţie. Să considerăm mulţimea de soluţii ale sistemului (1.45)

$$\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, ..., \mathbf{y}^{(n)}\} \tag{1.48}$$

care verifică următoarele condiţii ale lui Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(1)}(x_0) = (1,0,0,...,0), \\ \mathbf{y}^{(2)}(x_0) = (0,1,0,...,0), \\ \cdots, \\ \mathbf{y}^{(n)}(x_0) = (0,0,0,...,1) \end{cases} \tag{1.49}$$

şi să arătăm că elementele acestei mulţimi, ca elemente ale spaţiului $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$, sunt liniar independente. Vom demonstra prin reducere la absurd.

Presupunem deci că soluţiile sunt liniar dependente. Atunci există constantele C_1, C_2, $\ldots$, C_n, nu toate nule, astfel încât

$$C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{0}, \quad (\forall)\ x \in [a,b]. \tag{1.50}$$

În particular, (1.50) are loc pentru x_0 şi atunci, din (1.49) şi (1.50), avem

$$(C_1, C_2, ..., C_n) = (0, 0, ..., 0)$$

din care deducem că toate constantele $C_1, C_2, ..., C_n$ sunt egale cu zero, ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare, soluţiile (1.48) sunt *liniar independente*.

Să arătăm că soluţiile (1.48) constituie o bază în $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$.

Pentru aceasta, trebuie demonstrat că orice $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathbf{L}$ se scrie ca o combinaţie liniară de elementele din (1.48), deci că există constantele reale $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încât

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^{(1)} + C_2\mathbf{y}^{(2)} + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}, \tag{1.51}$$

sau

$$\mathbf{y}(x) = C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)(x)}, \quad (\forall)\ x \in [a,b]. \tag{1.52}$$

[1] Cauchy, Augustin Louis (1789 – 1857), ilustru matematician şi inginer francez. A demarat un proiect important de reformulare şi demonstrare riguroasă a teoremelor de algebră, a fost unul dintre pionierii analizei matematice şi a adus o serie de contribuţii şi în domeniul fizicii. Datorită perspicacităţii şi rigurozităţii metodelor sale, Cauchy a avut o influenţă extraordinară asupra contemporanilor şi predecesorilor săi. Catolic şi roialist fervent, a manifestat o prezenţă socială activă.

Scriind că (1.52) are loc şi pentru x_0 şi folosind (1.49), găsim

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) = (C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

din care deducem că C_i din (1.51) sunt unic determinate şi

$$C_1 = y_1(x_0), \quad C_2 = y_2(x_0), \quad \ldots, \quad C_n = y_n(x_0).$$

Prin urmare, soluţia considerată se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = y_1(x_0)\mathbf{y}^{(1)} + y_2(x_0)\mathbf{y}^{(2)} + \cdots + y_n(x_0)\mathbf{y}^{(n)}.$$

Am dovedit astfel că orice $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathbf{L}$ se exprimă unic ca o combinaţie liniară a vectorilor (1.48), liniar independenţi în $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$, ceea ce arată că mulţimea (1.48) este o bază în $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$.

Prin urmare, $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este spaţiu vectorial real n dimensional. **q.e.d.**

Definiţia 1.3.3. *Vom spune că n soluţii $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$ ale sistemului (1.45) formează un* **sistem fundamental de soluţii** *pe intervalul $[a, b]$ dacă ele sunt liniar independente în spaţiul liniar $n-$dimensional $Ker\,\mathbf{L}$.*

Cum dimensiunea lui $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este n rezultă că orice bază din $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este un sistem fundamental de soluţii a sistemului (1.45).

1.3.2 Matrice fundamentală a unui sistem omogen

Definiţia 1.3.4. *Matricea pătratică $\Gamma(x)$, de ordinul n, ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor $\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$ care formează un sistem fundamental de soluţii al sistemului liniar şi omogen de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, cu coeficienţi variabili (1.45), se numeşte* **matrice fundamentală** *a sistemului.*

Teorema 1.3.3. *Fie $\Gamma(x)$ o matrice fundamentală a sistemului (1.45), $\Gamma'(x)$ matricea formată din derivatele elementelor matricei $\Gamma(x)$ şi O matricea nulă pătratică de ordinul n. Atunci*

$$\Gamma'(x) \quad + \quad A(x)\Gamma(x) = O, \quad (\forall)\ x \in [a, b]. \tag{1.53}$$

Demonstraţie. Identitatea (1.53) este evidentă deoarece reprezintă scrierea matriceală a identităţilor

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}^{(i)}) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

care exprimă faptul că funcţiile vectoriale $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$ sunt soluţii ale sistemului (1.45). **q.e.d.**

Observaţia 1.3.2. *Matricea fundamentală a unui sistem omogen nu este unică.*

Într-adevăr, orice matrice $\widetilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) \cdot C$, unde C este o matrice pătratică constantă de ordinul n nesingulară, este, de asemenea, o matrice fundamentală a sistemului (1.45).

Reciproc, orice matrice fundamentală $\widetilde{\Gamma}(x)$ a sistemului (1.45) se poate reprezenta sub forma

$$\widetilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) \cdot C, \qquad x \in [a, b], \tag{1.54}$$

unde C este o matrice constantă de tip $n \times n$ nesingulară.

Ultima afirmaţie rezultă din corolarul următor. ■

Corolarul 1.3.1. *Dacă $\Gamma(x)$ este o matrice fundamentală a sistemului de ecuaţii diferenţiale (1.45), atunci orice soluţie a acestuia se reprezintă sub forma*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}(\Gamma(x)C), \qquad x \in [a, b], \tag{1.55}$$

unde C este matricea coloană a coordonatelor unui vector constant din $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Formula (1.55) rezultă din faptul că pe coloanele matricei $\Gamma(x)$ sunt coordonatele vectorilor unei baze din spaţiul soluţiilor sistemului (1.45). Astfel, (1.55) este exprimarea unui vector a unui spaţiu liniar n dimensional într–o bază. **q.e.d.**

1.3.3 Determinantul lui Wronski

Ca şi la studiul ecuaţiilor diferenţiale liniare, omogene de ordinul n, cu coeficienţi constanţi, se poate introduce *determinantul lui Wronski*[2] sau *wronskianul* asociat unui sistem fundamental de soluţii

$$W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}] = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_2^{(n)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \tag{1.56}$$

Pentru valorile funcţiei introdusă în (1.56) se pot utiliza notaţiile $W(x)$ sau $W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}](x)$.

Observaţia 1.3.3. *Wronskianul $W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}]$ asociat sistemului fundamental de soluţii*

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$$

este determinantul matricei fundamentale $\Gamma(x)$.

Teorema 1.3.4. *Condiţia necesară şi suficientă ca soluţiile*

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)},$$

ale sistemului (1.45), să formeze un sistem fundamental de soluţii a acestuia este ca determinantul lui Wronski corespunzător să nu fie identic nul pe intervalul $[a, b]$.

[2] Hoöné – Wronski, Josef Maria (1776 – 1853), filozof Messianist polonez, dar şi matematician, fizician, inventator, avocat şi economist. S–a născut Hoöné, dar şi–a schimbat numele în 1815.

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi suficienţa, adică din

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)} \in \operatorname{Ker} \mathbf{L} \qquad \text{şi} \qquad W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}]\Big|_{x=x_0} \neq 0$$

să rezulte că funcţiile

$$\mathbf{y}^{(1)}, \quad \mathbf{y}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{y}^{(n)} \tag{1.57}$$

formează un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (1.45).

Demonstraţia se face prin reducere la absurd.

Presupunem că funcţiile $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$, ca elemente ale lui $\operatorname{Ker} \mathbf{L}$, sunt liniar dependente. Există atunci n constante, nu toate nule, astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$ să avem

$$C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{0}. \tag{1.58}$$

Scriind (1.58) pe componente şi luând $x = x_0$, deducem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = 0, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = 0, \\ \cdots, \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{1.59}$$

Am obţinut astfel un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute al cărui determinant este $W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]\Big|_{x=x_0}$, care prin ipoteză este diferit de zero, deci sistemul (1.59) are numai soluţia banală $C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots, C_n = 0$, ceea ce contrazice presupunerea.

Deci, soluţiile (1.57) sunt liniar independente.

În baza Definiţiei 1.3.3, funcţiile (1.57) formează un sistem fundamental de soluţii al sistemului (1.45) pe intervalul $[a, b]$.

Să demonstrăm necesitatea. Dacă soluţiile $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$ sunt liniar independente atunci, măcar într–un punct $x_0 \in [a, b]$, determinantul lui Wronski asociat acestor soluţii este diferit de zero.

Deoarece $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$ formează o bază în $\operatorname{Ker} \mathbf{L}$, orice $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} \mathbf{L}$ se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^{(1)} + C_2\mathbf{y}^{(2)} + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}. \tag{1.60}$$

Considerând un $x_0 \in [a, b]$, notând $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$ şi scriind (1.60) pe coordonate în x_0, obţinem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = y_1^{(0)}, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = y_2^{(0)}, \\ \cdots, \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = y_n^{(0)}. \end{cases} \tag{1.61}$$

Deoarece sistemul (1.61) are soluţia unică $C_1, C_2, \ldots, C_n$, rezultă că determinantul sistemului,

$$W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]\Big|_{x=x_0},$$

este nenul. **q.e.d.**

Teorema 1.3.5. (**Liouville**[3]) *Dacă funcţia*

$$W(x) = W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]$$

este wronskianul unui sistem de n soluţii ale sistemului (1.45), atunci are loc egalitatea

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} tr\, A(t)\, dt}, \qquad (\forall)\ x, x_0 \in [a,b], \tag{1.62}$$

unde $tr\, A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ este urma matricei A a sistemului.

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că sistemul $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este liniar independent (în caz contrar $W(x) \equiv 0$ şi (1.62) este banal satisfăcută).

Fie $\Gamma(x)$ matricea fundamentală cu coloanele $\mathbf{y}^{(1)}(x),\ \mathbf{y}^{(2)}(x),\ \cdots,\ \mathbf{y}^{(n)}(x)$.

Din teorema creşterilor finite, avem $\Gamma(x+\varepsilon) = \Gamma(x) + \varepsilon\, \Gamma'(x) + o(\varepsilon)$, $x \in [a,b]$, iar din ecuaţia (1.53) rezultă

$$\Gamma(x+\varepsilon) = \Gamma(x) - \varepsilon\, A(x)\Gamma(x) + o(\varepsilon), \quad x \in [a,b]. \tag{1.63}$$

Dacă în egalitatea (1.63) luăm determinantul ambelor membri, obţinem:

$$W(x+\varepsilon) = \det\left(I_n - \varepsilon\, A(x) + o(\varepsilon)\Gamma^{-1}(x)\right)W(x) = W(x)\Big(1 - \varepsilon \operatorname{tr} A(x) + o(\varepsilon)\Big),$$

unde ε este arbitrar şi suficient de mic. Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$, rezultă

$$W'(x) = -\operatorname{tr} A(x)\, W(x), \quad x \in [a,b],$$

iar prin integrare se obţine formula (1.62). **q.e.d.**

1.3.4 Soluţia generală a sistemului omogen de ecuaţii diferenţiale liniare

Să presupunem că avem un sistem fundamental de soluţii

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \quad \mathbf{y}^{(2)}(x), \quad \ldots, \quad \mathbf{y}^{(n)}(x)$$

al sistemului (1.45). Orice altă soluţie a sistemului se scrie în mod unic în forma (1.60), unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante arbitrare.

Putem afirma că (1.60) constituie *soluţia generală* a sistemului (1.45), deoarece verifică sistemul, are în componenţa sa n constante arbitrare şi oricărei probleme de tip Cauchy a sistemului i se pot preciza în mod unic sistemul de constante $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încât soluţia determinată să satisfacă condiţia iniţială $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$, cu $\mathbf{y}^{(0)}$ vector arbitrar din $\mathbb{R}^n$.

Cum vectorul din membrul drept al relaţiei (1.60) se poate scrie în forma $\mathbf{e}(\Gamma(x)C)$, unde C este matrice cu o singură coloană şi cu n linii, rezultă că soluţia generală a sistemului (1.45) poate fi scrisă şi în forma (1.55).

Observaţia 1.3.4. *Sistemul fundamental de soluţii pentru (1.45) nu este unic.*

Într-adevăr, se ştie că într–un spaţiu liniar n dimensional există o infinitate de baze. Dacă mulţimea de funcţii $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este o bază în $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ şi $(C_j^i)_{i,j=\overline{1,n}}$ este o matrice pătratică nesingulară,

[3] Liouville, Joseph (1809 - 1882), matematician francez.

atunci sistemul de vectori

$$\widetilde{\mathbf{y}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} C_j^i \mathbf{y}^{(j)}, \qquad i \in \overline{1,n}, \tag{1.64}$$

formează de asemeni o bază în $\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}$ şi deci avem un alt sistem fundamental de soluţii.

Matricea constantă C din (1.64) este matricea de trecere de la baza $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ la sistemul de vectori

$$\{\widetilde{\mathbf{y}}^{(1)}(x), \widetilde{\mathbf{y}}^{(2)}(x), \ldots, \widetilde{\mathbf{y}}^{(n)}(x)\}. \tag{1.65}$$

Dacă această matrice de trecere este şi nesingulară, sistemul de vectori (1.65) este, de asemenea, sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (1.45). ■

1.4 Sisteme neomogene de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Să considerăm sistemul liniar şi neomgen de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \tag{1.66}$$

în care matricea $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ a coeficienţilor sistemului are elemente funcţii continue pe intervalul $[a,b]$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C([a,b])$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C^1([a,b])$, iar $Y = (y_i)_{1\times n}$ este matricea coloană cu n linii a necunoscutelor $y_i \in C^1([a,b])$ ale sistemului.

Ne propunem să determinăm soluţiile sistemului (1.66) prin *metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange*[4]. Vom cerceta dacă soluţia generală a sistemului (1.66) se poate obţine din soluţia generală (1.60) a sistemului omogen asociat sistemului (1.66), înlocuind constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ prin funcţiile convenabil alese

$$C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x). \tag{1.67}$$

Dacă mulţimea $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este un sistem fundamental de soluţii a sistemului omogen asociat $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, atunci vom determina funcţiile (1.67) continue şi cu derivate continue pe $[a,b]$, astfel încât

$$\mathbf{y}(x) = C_1(x)\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2(x)\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n(x)\mathbf{y}^{(n)}(x) \tag{1.68}$$

să fie soluţie a sistemului neomogen (1.66). Impunând aceasta şi ţinând cont că $\mathbf{y}^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, sunt soluţii ale sistemului omogen asociat, găsim sistemul

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{y}^{(i)}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.69}$$

care are forma matriceală

$$\Gamma(x) \cdot C'(x) = F(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{1.70}$$

Dar (1.69) este un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute $C_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Soluţia acestui sistem se deduce din (1.70) prin înmulţirea la stânga cu inversa matricei $\Gamma(x)$. Se obţine

$$C'(x) = \Gamma^{-1}(x) \cdot F(x). \tag{1.71}$$

[4]Lagrange, Joseph – Louis (17361813), matematician, mecanician şi astronom, născut în Torino, provincia Piemont din Italia. A trăit o parte a vieţii în Prusia şi o alta în Franţa. A adus contribuţii semnificative în toate domeniile analizei matematice, teoriei numerelor, mecanicii clasice şi mecanicii cereşti. La recomandarea lui Euler şi d'Alembert, în 1766 Lagrange i–a succedat lui Euler la conducerea secţiei de matematici a Academiei de Ştiinţe a Prusiei din Berlin, post în care a activat timp de 20 de ani efectuând un mare volum de muncă şi câştigând câteva premii ale Academiei de Ştiinţe a Franţei. Tratatul lui Lagrange asupra mecanicii analitice (Mecanică Analitică, a 4–a Ediţie, 2 Volume, Editura Gauthier–Villars, Paris, 1888–1889), scris în Berlin şi publicat prima dată în 1788, oferă cel mai cuprinzător studiu al mecanicii clasice de la Newton, constituind totodată fundamentul pentru dezvoltarea fizicii matematice din secolul 19. În 1787, la vârsta de 51 de ani, se mută de la Berlin în Franţa, devine membru al Academiei de Ştiinţe a Franţei şi rămâne în Franţa până la sfârşitul vieţii. Prin urmare, Lagrange este considerat deopotrivă om de ştiinţă francez şi italian. Lagrange a supravieţuit Revoluţiei din Franţa şi a devenit primul profesor de analiză matematică a Şcolii Politehnice din Paris încă de la deschiderea sa din 1794. Napoleon i–a acordat lui Lagrange Legiunea de Onoare şi l–a înobilat în 1808 cu titlul de Conte al Imperiului. Este înmormântat în Panteon şi numele său apare printre cele 72 de personalităţi ale căror nume sunt inscripţionate pe Turnul Eiffel.

Integrând ecuaţiile diferenţiale ordinare (1.71) se găseşte

$$C(x) = K + \int_{x_0}^{x} \Gamma^{-1}(s) \cdot F(s)ds, \tag{1.72}$$

unde $K \in \mathcal{M}_{1\times n}$ are elemente constante arbitrare.

Înlocuind (1.72) în (1.68), obţinem soluţia generală a sistemului neomogen (1.66)

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}\Big(\Gamma(x)K + \int_{x_0}^{x} \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s)F(s)ds\Big), \tag{1.73}$$

unde F este matricea coordonatelor vectorului $\mathbf{f}$ în baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Să mai observăm că (1.73) se scrie şi în forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}\Big(\Gamma(x)K\Big) + \mathbf{e}\Big(\int_{x_0}^{x} \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s)F(s)ds\Big) = \mathbf{y}_o(x) + \mathbf{y}_{\mathrm{P}}(x), \tag{1.74}$$

din care deducem că soluţia generală a sistemului neomogen (1.66) este suma dintre soluţia generală $\mathbf{y}_o(x)$ a sistemului omogen asociat $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ şi o soluţie particulară $\mathbf{y}_{\mathrm{P}}(x)$ a sistemului neomogen.

O soluţie particulară a sistemului neomogen (1.66) se obţine prin metoda variaţiei constantelor luând pentru K din (1.72) matricea coloană identic nulă.

1.5 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Să studiem sistemele de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi, neomogene şi omogene, în care coeficienţii din (1.42) sunt constante reale notate cu $-a_{ij}$.

Astfel de sisteme diferenţiale le vom numi în continuare *sisteme diferenţiale liniare*.

Forma generală a unui *sistem diferenţial liniar, neomogen* este

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{1.75}$$

în care $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt funcţii date, continue pe un compact $[a, b]$.

Dacă în (1.75) toate funcţiile f_i sunt identic nule, atunci sistemul diferenţial liniar corespunzător

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{1.76}$$

este un *sistem omogen de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi*, sau *sistem diferenţial liniar şi omogen cu coeficienţi constanţi*. Deoarece coeficienţii acestui sistem coincid cu cei ai sistemului (1.75), sistemul diferenţial se numeşte *asociatul* sistemului (1.75).

Forma matriceală a unui astfel de sistem omogen este

$$Y' = AY, \tag{1.77}$$

unde Y este matricea cu o singură coloană cu elementele coordonatele vectorului $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, iar A este matricea pătratică de ordinul n a cărei elemente sunt coeficienţii sistemului.

Toate rezultatele stabilite mai sus pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili, omogene şi neomogene, sunt adevărate şi pentru sistemele (1.75) şi (1.76).

Vom determina soluţia generală a sistemului omogen (1.76) folosind teoria valorilor şi vectorilor proprii a unei matrice pătratice.

Pentru aceasta, căutăm soluţii particulare ale sistemului (1.77) de forma

$$Y = \Gamma\, e^{rx}, \tag{1.78}$$

unde Γ este matricea coordonatelor vectorului nenul $\boldsymbol{\gamma}$, deci $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}\Gamma$, iar r este un număr real sau complex.

Vom determina $\boldsymbol{\gamma}$ şi r din condiţia ca $\mathbf{y} = \mathbf{e}\Gamma\, e^{rx}$ să fie soluţie a sistemului (1.76), a cărui formă vectorială este

$$\mathbf{y}' = \mathbf{e}(AY). \tag{1.79}$$

Impunând condiţia ca Y din (1.78) să verifice (1.77), găsim că Γ este soluţia unui sistem liniar omogen a cărui formă matriceală este

$$(A - rE)\Gamma = O, \tag{1.80}$$

unde E este matricea unitate de ordinul n, iar O este matricea nulă.

Pentru ca sistemul algebric (1.80) să aibă soluţii nebanale, determinantul acestuia trebuie să fie nul. Astfel, obţinem ecuaţia algebrică de gradul n în necunoscuta r

$$\det(A - rE) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0, \tag{1.81}$$

numită *ecuaţie caracteristică* a sistemului diferenţial (1.76).

Ecuaţiile (1.81) şi (1.80) arată că Γ din (1.78) este matricea coloană a vectorului propriu $\boldsymbol{\gamma}$ a matricei A, corespunzător valorii proprii r.

Dacă ecuaţia caracteristică (1.81) are toate cele n rădăcini reale şi distincte, $r_1,\, r_2,\, \dots,\, r_n$, lor le corespund n vectori proprii $\boldsymbol{\gamma}_i$, respectiv n soluţii particulare ale sistemului neomogen (1.79)

$$\mathbf{y}_1(x) = \boldsymbol{\gamma}_1 e^{r_1 x}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \boldsymbol{\gamma}_2 e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_n(x) = \boldsymbol{\gamma}_n e^{r_n x}. \tag{1.82}$$

Wronskianul soluţiilor (1.82) este produsul dintre $e^{(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})x}$ şi determinantul Vandermonde[5] construit cu numerele $r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_n$. Deoarece rădăcinile caracteristice sunt distincte, rezultă că wronskianul soluţiilor menţionate în (1.82) este diferit de zero, fapt ce atrage concluzia că funcţiile (1.82) constituie un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale (1.76).

În acest caz, soluţia generală a sistemului (1.76) este combinaţia liniară

$$\mathbf{y} = C_1\boldsymbol{\gamma}_1 e^{r_1 x} + C_2\boldsymbol{\gamma}_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n\boldsymbol{\gamma}_n e^{r_n x}, \tag{1.83}$$

în care $C_1, C_2, \dots, C_n$ sunt constante arbitrare. Forma acestei soluţii generale este

$$Y = C_1\Gamma_1 e^{r_1 x} + C_2\Gamma_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n\Gamma_n e^{r_n x}. \tag{1.84}$$

Teorema 1.5.1. *Dacă ecuaţia caracteristică are, de pildă, rădăcina r_1 multiplă de ordinul k, atunci partea din soluţia generală corespunzătoare ei are forma*

$$\begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \dots \\ P_n(x) \end{pmatrix} e^{r_1 x}, \tag{1.85}$$

[5] Vandermonde, Alexandre – Théophile (1735 - 1796), matematician, chimist şi muzician francez ce a lucrat cu Bezout şi Lavoisier; numele lui este în principal asociat cu teoria determinanţilor din matematică.

unde $P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x)$ sunt polinoame de grad cel mult $k-1$, având coeficienţii funcţii liniare de k constante oarecare $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k$. Polinoamele $P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x)$ nu pot fi identic nule decât dacă toate constantele $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_k$ sunt nule.

Cazul rădăcinilor complexe poate fi tratat în mod analog. Vor rezulta soluţii complex conjugate în perechi. Din fiecare astfel de pereche se construiesc alte două soluţii reale luând semisuma acestora şi semidiferenţa împărţită prin unitatea imaginară.

Pentru determinarea soluţiilor particulare ale sistemelor neomogene se poate folosi metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange. În cazul în care $f_i(x)=e^{\alpha x}(Q_i^1(x)\cos\beta x+Q_i^2(x)\sin\beta x)$, soluţii particulare se pot obţine prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi, fără cuadraturi. Mai precis, se caută soluţii particulare de forma termenului liber, adică de forma

$$y_i(x)=x^s e^{\alpha x}(R_i^1(x)\cos\beta x+R_i^2(x)\sin\beta x),\quad i=\overline{1,n},$$

unde R_i^1 şi R_i^2 sunt polinoame de aceleaşi grade cu respectiv polinoamele Q_i^1 şi Q_i^2, iar s este multiplicitatea lui $r=\alpha+i\beta$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice.

Vom ilustra aceste afirmaţii prin exemple.

Exemplul 1.5.1. *Să se determine soluţia generală a sistemului diferenţial omogen*

$$\begin{cases} y_1'=2y_1-2y_2+3y_3,\\[2ex] y_2'=y_1+y_2+y_3,\\[2ex] y_3'=y_1+3y_2-y_3.\end{cases}$$

Soluţie. Sistemul de ecuaţii diferenţiale dat este de ordinul întâi, omogen, cu coeficienţi constanţi şi se poate scrie în forma matriceală

$$Y'=AY,\quad \text{unde}\quad A=\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\quad Y'=\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}.$$

Pentru a determina soluţia generală a sistemului, aplicăm *metoda valorilor şi vectorilor proprii*.

Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\det(A-rE)=\begin{vmatrix}2-r&-2&3\\1&1-r&1\\1&3&-1-r\end{vmatrix}=0,$$

adică a ecuaţiei $r^3-2r^2-5r+6=0$. Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $r_1=1$, $r_2=3$, $r_3=-2$.

Deoarece valorile proprii sunt reale şi distincte, *vectorii proprii* corespunzători sunt liniar independenţi.

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r este o soluţie nebanală a sistemului liniar şi omogen

$$\begin{cases}(2-r)\gamma_1 & -2\gamma_2 & +3\gamma_3=0,\\ \gamma_1 & +(1-r)\gamma_2 & +\gamma_3=0,\\ \gamma_1 & +3\gamma_2 & +(-1-r)\gamma_3=0.\end{cases}\tag{1.86}$$

Cele trei sisteme corespunzătoare rădăcinilor caracteristice, obţinute din (1.86) luând succesiv pentru r valorile $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -2$, sunt:

$$\begin{cases} \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 \quad + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 4\gamma_3 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 4\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Corespunzător vectorilor proprii

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = (-1, 1, 1), \quad \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{\gamma}^{(3)} = (11, 1, -14).$$

avem următoarele soluţii liniar independente ale sistemului

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}; \quad Y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}; \quad Y^{(3)}(x) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

şi prin urmare soluţia generală a sistemului diferenţial este

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x) + C_3 Y^{(3)}(x),$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt constante arbitrare.

Egalând elementele corespunzătoare găsim soluţia generală pe componente (coordonate)

$$\begin{cases} y_1(x) = -C_1 e^{x} + C_2 e^{x} + 11 C_3 e^{-2x}, \\ y_2(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x}, \\ y_3(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{3x} - 14 C_3 e^{-2x}. \end{cases} \tag{1.87}$$

Integrarea sistemului se poate efectua şi prin **metoda eliminării** . ∎

Exemplul 1.5.2. *Să se afle soluţia generală a sistemului liniar de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Soluţie. Matricea sistemului are ecuaţia caracteristică $r^2 - 4r + 4 = 0$ cu rădăcina dublă $r = 2$. Conform Teoremei 1.5.1, soluţia generală a sistemului se caută sub forma

$$\begin{cases} y_1 = (A_1 x + C_1) e^{2x}, \\ y_2 = (A_2 x + C_2) e^{2x}. \end{cases}$$

Se găseşte

$$\begin{cases} y_1 = \Big((C_1 + C_2) x + C_1 \Big) e^{2x}, \\ y_2 = \Big(-(C_1 + C_2) x + C_2 \Big) e^{2x}, \end{cases}$$

sau, matriceal, $Y = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x)$, unde $Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ -x \end{pmatrix} e^{2x}$, $Y^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} e^{2x}$. ∎

Exemplul 1.5.3. *Determinaţi soluţia generală a sistemului omogen*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' = 2y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_3' = -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul se poate scrie matriceal în forma $Y' = AY$, unde matricea sa $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ are valoarea proprie triplă $r = 1$. Conform Teoremei 1.5.1, soluţia generală trebuie căutată sub forma

$$Y = \begin{pmatrix} A_1x^2 + B_1x + C_1 \\ A_2x^2 + B_2x + C_2 \\ A_3x^2 + B_3x + C_3 \end{pmatrix} e^x.$$

În cele din urmă se găseşte că Y se scrie ca o combinaţie liniară de constantele C_1, C_2, C_3

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ x+1 \end{pmatrix} e^x.$$

■

Exemplul 1.5.4. *Să se integreze sistemul* $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Soluţie. Se aplică metoda valorilor şi vectorilor proprii.
Valorile proprii sunt numerele complex conjugate $r_1 = 3 + i$, $r_2 = 3 - i$.
După determinarea vectorilor proprii corespunzători se găsesc soluţiile complex conjugate

$$\widetilde{Y}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3+i)x}, \quad \widetilde{Y}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3-i)x}.$$

Pornind de la acestea, determinăm alte două soluţii liniar independente,

$$Y^{(1)}(x) = \frac{\widetilde{Y}^{(1)}(x) + \widetilde{Y}^{(2)}(x)}{2} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^{3x}, \qquad Y^{(2)}(x) = \frac{\widetilde{Y}^{(1)}(x) - \widetilde{Y}^{(2)}(x)}{2i} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Aşadar, soluţia generală a sistemului, scrisă matriceal, este

$$Y(x) = C_1Y^{(1)}(x) + C_2Y^{(2)}(x),$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante reale arbitrare. ■

Exemplul 1.5.5. *Să se integreze sistemul* $\begin{cases} y_1' = \qquad\quad y_2, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$

Soluţie. Valorile proprii ale matricei sistemului sunt $r_1 = r_2 = 1$.

Sistemul de ecuaţii care dă coordonatele vectorilor proprii se reduce la o singură ecuaţie $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Toţi vectorii proprii sunt de forma $\boldsymbol{\gamma} = \lambda(1, 1)$, unde $\lambda \neq 0$. Deci, nu există doi vectori proprii liniar independenţi.

Se caută atunci soluţia generală a sistemului în forma

$$y_1(x) = (C_1 + C_2 x)e^x, \quad y_2(x) = (D_1 + D_2 x)e^x.$$

Găsim $y_1(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$, $y_2(x) = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^x$, unde C_1 şi C_2 sunt constante reale arbitrare. ■

Exemplul 1.5.6. *Să se determine soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2 + 2x, \\ y_2' = y_1 + y_2 + x \end{cases}$$

şi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţiile iniţiale $y_1(0) = 15$ *şi* $y_2(0) = -8$.

Soluţie. Avem de integrat un sistem de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi neomogen, termenii liberi fiind polinoame de gradul întâi.

Determinăm întâi soluţia generală a sistemului omogen asociat

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 - 4y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

Pentru aceasta, procedăm ca în exemplul precedent şi găsim $\begin{cases} y_1^{(o)}(x) = (-2C_1 + C_2 - 2C_2 x)e^{-x}, \\ y_2^{(o)}(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}. \end{cases}$

Determinăm o soluţie particulară a sistemului neomogen de forma membrului drept. Deoarece $r = 0$ nu este rădăcină caracteristică a sistemului omogen asociat, se caută o soluţie particulară de forma

$$y_1^p(x) = A_1 x + B_1, \quad y_2^p(x) = A_2 x + B_2.$$

Se găseşte $A_1 = -6, A_2 = 5, B_1 = 14, B_2 = -9$.

Deoarece soluţia generală a sistemului dat este suma dintre soluţia generală a sistemului omogen asociat şi soluţia particulară determinată, avem

$$\begin{cases} y_1(x) = y_1^{(o)}(x) + y_1^p(x) = (-2C_1 + C_2 - 2C_2 x)e^{-x} - 6x + 14, \\ y_2(x) = y_2^{(o)}(x) + y_2^p(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 5x - 9. \end{cases}$$

Impunând soluţiei generale satisfacerea condiţiilor iniţiale, găsim că valorile constantelor C_1 şi C_2 sunt 1 şi respectiv 3. Prin urmare, soluţia problemei lui Cauchy este

$$\begin{cases} y_1(x) = (1 - 6x)e^{-x} - 6x + 14, \\ y_2(x) = (3x + 1)e^{-x} + 5x - 9. \end{cases}$$

■

Capitolul 2

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi

2.1 Ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul întâi

2.1.1 Definiţii. Suprafeţe integrale

Definiţia 2.1.1. *O relaţie de forma*

$$F\Big(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{2.1}$$

unde F este o funcţie reală continuă de $2n+1$ variabile reale definită pe un domeniu $\Delta \subset \mathbb{R}^{2n+1}$, se numeşte **ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi**, *dacă se cere să se determine funcţia*

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.2}$$

cu derivate parţiale de ordinul întâi continue într–un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$, astfel încât să avem

$$F\Big(\mathbf{x}; \varphi(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x})\Big) \equiv 0 \tag{2.3}$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

În cele ce urmează, $\mathcal{F}(D)$ reprezintă spaţiul liniar al funcţiilor reale definite pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$.

Definiţia 2.1.2. *Funcţia $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ din (2.2) care satisface condiţia (2.3) se numeşte* **soluţie** *sau* **suprafaţă integrală** *a ecuaţiei (2.1).*

Definiţia 2.1.3. *Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi de forma*

$$X_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{2.4}$$

se numeşte ***ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi, liniară şi omogenă*** *.*

Forma (2.4) arată că ecuaţia depinde liniar de derivatele parţiale ale funcţiei necunoscute u, iar coeficienţii X_k sunt funcţii doar de variabila vectorială $\mathbf{x}$, adică de variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. În plus, vom presupune că funcţiile X_k sunt de clasă $C^1(D)$ şi nu se anulează simultan în D, ceea ce înseamnă că are loc inegalitatea

$$X_1^2(\mathbf{x}) + X_2^2(\mathbf{x}) + \cdots + X_n^2(\mathbf{x}) > 0, \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in D. \tag{2.5}$$

2.1.2 Sistem caracteristic. Curbe caracteristice

Considerăm ecuaţia liniară (2.4) în care funcţiile $X_k \in C^1(D)$ satisfac în D condiţia (2.5).

Definiţia 2.1.4. *Sistemul simetric definit în* D

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})} \tag{2.6}$$

se numeşte **sistemul caracteristic asociat** *ecuaţiei cu derivate parţiale* (2.4).

Definiţia 2.1.5. *Curbele integrale ale sistemului* (2.6) *se numesc* **curbe caracteristice** *ale ecuaţiei cu derivate parţiale liniară şi omogenă* (2.4).

În ipoteza că x_n este variabilă independentă, din paragraful **1.2** rezultă că soluţia generală a sistemului carcteristic (2.6) este

$$x_i = \varphi_i(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{2.7}$$

sau, rezolvând în raport cu constantele arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$,

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2, \\ \qquad \ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}, \end{cases} \tag{2.8}$$

unde $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt funcţii continue cu derivate parţiale continue în D.

Oricare din relaţiile (2.8) se numeşte *integrală primă* a sistemului caracteristic (2.6), iar ansamblul (2.8) reprezintă o familie de curbe integrale, sau o familie de curbe caracteristice ale ecuaţiei (2.4).

Vom vedea că integrarea ecuaţiei (2.4) este strâns legată de integrarea sistemului caracteristic asociat (2.6). Această legătură este dată de teorema următoare.

Teorema 2.1.1. *Dacă relaţia*

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \tag{2.9}$$

este o integrală primă a sistemului caracteristic (2.6), *atunci funcţia reală de* n *variabile reale definită pe* D

$$u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.10}$$

este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (2.4).

Demonstraţie. Folosind Teorema 1.2.1, rezultă că dacă (2.9) este o integrală primă a sistemului caracteristic (2.6), atunci de–a lungul unei curbe caracteristice avem

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \tag{2.11}$$

Egalitatea (2.11) fiind adevărată pentru orice constantă C, este adevărată pentru orice curbă integrală situată în D, de unde rezultă că este adevărată pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$; prin urmare (2.10) este o soluţie a ecuaţiei (2.4) în D. **q.e.d.**

2.1.3 Soluţia generală

Teorema 2.1.2. *Dacă $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime ale sistemului caracteristic (2.6), independente funcţional pe mulţimea $D' \subset D$, şi*

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$$

este o funcţie oarecare cu derivate parţiale continue într–un domeniu $\Delta \subset \mathbb{R}^{n-1}$, atunci funcţia $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$, unde

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{x})), \tag{2.12}$$

este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (2.4) în D'.

Demonstraţie. În prima etapă arătăm că funcţia $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ verifică ecuaţia (2.4). Pentru aceasta trebuie să calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi ale acestei funcţii. Aplicând regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2}, \\ \cdots, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Dacă în relaţia de ordin j din (2.13) înmulţim cu X_j, unde $j \in \{1, 2, ..., (n-1)\}$, şi adunăm pe coloane, obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} \Big) \tag{2.14}$$

Însă, în (2.14) fiecare paranteză din partea dreaptă este nulă deoarece, conform Teoremei 2.1.1, funcţiile $\psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = \overline{1, n-1}$, sunt soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale (2.4). Rezultă că funcţia u din (2.12) este soluţie a ecuaţiei (2.4).

Reciproc, orice soluţie $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a ecuaţiei (2.4) este de forma (2.12).

Într-adevăr, $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fiind soluţie a ecuaţiei (2.4), avem

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{2.15}$$

Pe lângă aceasta, avem şi relaţiile

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{2.16}$$

care exprimă că integralele prime $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi (2.4).

Pentru orice punct fixat $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$, ecuaţiile (2.15) şi (2.16) formează un sistem de n ecuaţii liniare şi omogene în necunoscutele X_1, X_2, $\ldots$, X_n. Datorită condiţiei (2.5), acest sistem are şi soluţii nebanale.

Conform teoremei lui Rouché[1], determinantul sistemului

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{2.17}$$

trebuie să fie nul pentru orice $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$. Aşadar, putem scrie

$$\frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)} = 0, \quad (\forall)\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

Deoarece $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime independente funcţional în D, există domeniul $D' \subset D$ în care matricea jacobiană $J_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})$, unde $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, are rangul $n-1$. Aceasta înseamnă că cel puţin un minor de ordinul $n-1$ al matricei este nenul pe D'. Fie că acest minor este determinantul funcţional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})} \neq 0, \quad (\forall)\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D. \tag{2.18}$$

Folosind rezultatele de la dependenţă şi independenţă funcţională a funcţiilor, rezultă că funcţia u depinde funcţional pe $D'' \subset D'$ de funcţiile $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$. Prin urmare, putem scrie $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$. **q.e.d.**

Definiţia 2.1.6. *Funcţia* u *din* (2.12), *unde* Φ *este o funcţie arbitrară definită pe un domeniu din spaţiul* $\mathbb{R}^{n-1}$, *se numeşte* **soluţia generală** *a ecuaţiei cu derivate parţiale liniare şi omogenă* (2.4).

Exerciţiul 2.1.1. *Să se integreze următoarele ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi omogene*

1. $(x+2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$ **2.** $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

3. $x(2x^3 - y^3)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y(x^3 - 2y^3)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$ **4.** $2\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Soluţie. Sistemele caracteristice corespunzătoare ale acestor ecuaţii sunt:

$$\mathbf{1.}\ \frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y}; \quad \mathbf{2.}\ \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}; \quad \mathbf{3.}\ \frac{dx}{x(2x^3 - y^3)} = \frac{dy}{y(x^3 - 2y^3)}; \quad \mathbf{4.}\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{-y}.$$

[1] Rouché, Eugène (1832 – 1910), matematician francez. În 1896 a fost ales membru al Academiei de Ştiinţe din Franţa.

Aceste sisteme caracteristice sunt echivalente respectiv cu ecuaţiile diferenţiale ordinare

$$\textbf{1}.\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+2y};\qquad \textbf{2}.\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y};$$
$$\textbf{3}.\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(x^3-2y^3)}{x(2x^3-y^3)};\quad \textbf{4}.\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

Prima şi a treia ecuaţie diferenţială de ordinul întâi este omogenă şi se integrează utilizând substituţia $\dfrac{y}{x}=u$, unde noua funcţie necunoscută este u, ce depinde de x, iar celelalte două ecuaţii sunt cu variabile separabile. Soluţiile acestor ecuaţii diferenţiale ordinare sunt:

$$\textbf{1}.\ y(x+y)=C;\quad \textbf{2}.\ x^2+y^2=C;\quad \textbf{3}.\ \frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=C;\quad \textbf{4}.\ \sqrt{x}+\ln y=C.$$

Fiecare din relaţiile de mai sus reprezintă o integrală primă pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi omogenă corespunzătoare.

Soluţia generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi omogenă este o funcţie arbitrară de $n-1$ integrale prime independente. Cum pentru toate aceste exerciţii n este 2, la fiecare avem nevoie doar de câte o integrală primă şi le vom considera pe cele deduse mai sus. Prin urmare, soluţiile ecuaţiilor date sunt respectiv

$$\textbf{1}.\quad z=\psi(y(x+y));\quad \textbf{2}.\quad z=\psi(x^2+y^2);$$
$$\textbf{3}.\quad z=\psi\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\Big);\quad \textbf{4}.\quad z=\psi(\sqrt{x}+\ln y),$$

unde ψ este o funcţie oarecare de clasă $C^1(I)$ şi I un interval real. ■

Exerciţiul 2.1.2. *Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi omogene*

$$\textbf{1}.\quad (az-by)\frac{\partial u}{\partial x}+(bx-cz)\frac{\partial u}{\partial y}+(cy-ax)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad a,b,c\in\mathbb{R};$$

$$\textbf{2}.\quad (x-a)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial u}{\partial y}+(z-c)\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad a,b,c\in\mathbb{R};$$

$$\textbf{3}.\quad xz\frac{\partial u}{\partial x}-yz\frac{\partial u}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial u}{\partial z}=0;$$

$$\textbf{4}.\quad (x-y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0;$$

$$\textbf{5}.\quad xy\frac{\partial w}{\partial x}-y^2\frac{\partial w}{\partial y}+z^2\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

$$\textbf{6}.\quad x^2\frac{\partial F}{\partial x}-xy\frac{\partial F}{\partial y}+y^2\frac{\partial F}{\partial z}=0;$$

$$\textbf{7}.\quad \sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0;$$

$$\textbf{8}.\quad 2\cosh x\,\frac{\partial u}{\partial x}+2\sinh x\,\frac{\partial u}{\partial y}-z\sinh x\,\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Soluţie. Sistemele caracteristice corespunzătoare ecuaţiilor de mai sus sunt:

$$\textbf{1}.\quad \frac{dx}{az-by}=\frac{dy}{bx-cz}=\frac{dz}{cy-ax};$$

$$\textbf{2}.\quad \frac{dx}{x-a}=\frac{dy}{y-b}=\frac{dz}{z-c};$$

$$\textbf{3}.\quad \frac{dx}{xz}=\frac{dy}{-yz}=\frac{dz}{x^2-y^2};$$

$$\textbf{4}.\quad \frac{dx}{x-y+z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z};$$

$$\textbf{5}.\quad \frac{dx}{xy}=\frac{dy}{-y^2}=\frac{dz}{z^2};$$

$$\textbf{6}.\quad \frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{y^2};$$

$$\textbf{7}.\quad \frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dz}{\sqrt{z}};$$

$$\textbf{8}.\quad \frac{dx}{2\cosh x}=\frac{dy}{2\sinh x}=\frac{dz}{-z\sinh x}.$$

Vom căuta combinaţii integrabile ale rapoartelor egale.

1. Prin înmulţirea celor trei rapoarte cu respectiv x, y şi z şi adunarea numărătorilor şi a numitorilor, obţinem un nou raport care are numitorul egal cu zero, iar numărătorul este diferenţiala expresiei $x^2+y^2+z^2$. Rezultă că şi numărătorul trebuie să fie zero şi prin urmare $x^2+y^2+z^2=C_1$ este prima integrală primă a sistemului caracteristic corespunzător primei ecuaţii.

Înmulţind acum rapoartele cu c, a şi b şi adunând iarăşi numărătorii şi numitorii între ei, obţinem din nou zero la numitor. Prin urmare $cx+ay+bz=C_2$ este a doua integrală primă.

$$\textbf{2}.\ \begin{cases} \dfrac{dx}{x-a}=\dfrac{dy}{y-b} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{x-a}{y-b}=C_1,\\[2ex] \dfrac{dy}{y-b}=\dfrac{dz}{z-c} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{y-b}{z-c}=C_2. \end{cases}$$

3. Considerăm primele două rapoarte. După simplificare prin z se obţine combinaţia integrabilă $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-y}$ care conduce la integrala primă $xy=C_1$.

A doua integrală primă se obţine după ce adunăm numărătorii şi numitorii din primele două rapoarte, raportul găsit egalându–l cu al treilea. Avem $\dfrac{d(x+y)}{z(x-y)}=\dfrac{dz}{x^2-y^2}$, de unde, după simplificare cu $x-y$, se obţine combinaţia integrabilă

$$(x+y)d(x+y)=zdz$$

care conduce la integrala primă $(x+y)^2-z^2=C_2$.

4. Integrând $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$ obţinem integrala primă $\psi_1(x,y,z)=\dfrac{y}{z}$.

Pentru a obţine a doua integrală primă pornim de la egalitatea

$$\frac{dx}{x-y+z}=\frac{d(y-z)}{y-z},$$

dedusă folosind o proprietate a rapoartelor egale. Notând $y-z=u$, se ajunge la ecuaţia liniară de ordinul întâi neomogenă $\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=-1$ care are soluţia $x=u(C_2-\ln u)$. Revenind la variabilele x, y, z se obţine a doua integrală primă $\dfrac{x}{y-z}+\ln{(y-z)}=C_2$.

5. Cele două integrale prime independente funcţional se obţin considerând primele două rapoarte şi respectiv ultimele două. Se obţine:

$$xy = C_1; \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = C_2.$$

6. O integrală primă se găseşte prin considerarea primelor două rapoarte. După simplificare cu x şi apoi integrare, se obţine $xy = C_1$.

Pentru cea de a doua integrală primă vom folosi integrala primă găsită.

Din ultimele două rapoarte se obţine $y\,dy = -x\,dz$ care, după înmulţire cu y şi folosirea integralei prime deja găsită, se obţine $\frac{1}{3}y^3 + C_1 z = C_2$. Înlocuind $C_1 = xy$ avem că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{1}{3}y^3 + xyz = C_2.$$

7. Cele două combinaţii integrabile le vom determina considerând primele două rapoarte şi apoi ultimele două. Integrând, obţinem:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1; \quad \sqrt{y} - \sqrt{z} = C_2.$$

8. O combinaţie integrabilă este $\dfrac{dx}{2\,\cosh x} = \dfrac{dy}{2\,\sinh x}$ din care rezultă integrala primă $y - \ln\cosh x = C_1$.

A doua integrală primă se obţine dacă se consideră ultimele două rapoarte după care se simplifică prin $\sinh x$. Integrând în ambii membri, avem $z^2\,e^y = C_2$.

Astfel, soluţiile generale ale ecuaţiilor cu derivate parţiale din enunţ sunt:

1. $u(x, y, z) = \Phi(x^2 + y^2 + z^2,\, cx + ay + bz)$;

2. $u(x, y, z) = \Phi(\dfrac{x-a}{y-b}, \dfrac{y-b}{z-c})$;

3. $u(x, y, z) = \Phi(xy,\, (x+y)^2 - z^2)$;

4. $u(x, y, z) = \Phi(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{y-z} + \ln(y-z))$;

5. $u(x, y, z) = \Phi(xy, \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z})$;

6. $u(x, y, z) = \Phi(xy, \dfrac{1}{3}y^3 + xyz)$;

7. $u(x, y, z) = \Phi(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{y} - \sqrt{z})$;

8. $u(x, y, z) = \Phi(y - \ln\cosh x,\, z^2 e^y)$,

unde Φ este o funcţie arbitrară de integralele prime menţionate. ■

2.1.4 Problema lui Cauchy

În general, în problemele practice, nu interesează soluţii arbitrare ale ecuaţiei (2.4), ci acele soluţii care să îndeplinească anumite condiţii iniţiale.

Definiţia 2.1.7. *Problema determinării în domeniul* $D \subset \mathbb{R}^n$ *a acelei soluţii* $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *a ecuaţiei cu derivate parţiale liniare şi omogene* (2.4) *care pentru* $x_n = x_n^0$ *se reduce la o funcţie dată* $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in C^1(D')$, *unde* $D' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, *adică*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in D', \tag{2.19}$$

se numeşte **problema lui Cauchy** *pentru ecuaţia* (2.4).

În anumite condiţii impuse funcţiilor X_k şi ψ soluţia problemei Cauchy există şi este unică.

În cele ce urmează ne vom ocupa de determinarea efectivă a soluţiei problemei lui Cauchy.

Această soluţie va fi de forma (2.12) şi problema se reduce la a determina funcţia Φ, deci de a determina legătura între integralele prime $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{n-1}$.

Fie o vecinătate a punctului $M_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$, inclusă în D, în care determinantul funcţional (2.18) este diferit de zero. O asemenea vecinătate există în baza faptului că funcţiile $\psi_k,\ k = \overline{1, n-1}$, sunt continue şi au derivate parţiale continue pe D. Dacă în (2.8) punem $x_n = x_n^0$, obţinem sistemul

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = C_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{2.20}$$

care, rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, conduce la

$$x_j = \omega_j(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{2.21}$$

Putem enunţa acum următoarea teoremă.

Teorema 2.1.3. *Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia* (2.4) *cu condiţia iniţială* (2.19) *este dată de*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \cdots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})),$$

unde $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ *sunt* $n-1$ *integrale prime independente funcţional ale sistemului caracteristic* (2.6).

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că funcţia u din enunţul teoremei este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (2.4), apoi că verifică condiţia iniţială (2.19).

Faptul că u este soluţie a ecuaţiei (2.4) rezultă imediat din faptul că u este de forma $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ după cum rezultă din expresia ei.

Soluţia verifică condiţia iniţială în vecinătatea U a punctului M_0. În adevăr pentru $x_n = x_n^0$, conform relaţiilor (2.20) şi (2.21), rezultă că (2.19) este îndeplinită. Din modul cum este construită funcţia u rezultă şi unicitatea ei. **q.e.d.**

Exerciţiul 2.1.3. *Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuaţiile cu derivate parţiale liniare şi omogene*

$$\mathbf{1}.\qquad 2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z^3\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$\mathbf{2}.\quad zux + (x-z)^2\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

cu condiţiile iniţiale date respectiv de: **1**. $u(x, y, 1) = x + y$; **2**. $u(x, 0, z) = 2z(z - x)$.

Soluţie. Sistemele caracteristice corespunzătoare

$$\mathbf{1}.\quad \frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^3}, \qquad \mathbf{2}.\quad \frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}$$

au integralele prime

$$\mathbf{1.}\begin{cases}\psi_1(x,y,z)=xy^2,\\[2ex] \psi_2(x,y,z)=\dfrac{1}{z^2}+\ln x,\end{cases}\qquad \mathbf{2.}\begin{cases}\psi_1(x,y,z)=x^2-z^2\\[2ex] \psi_2(x,y,z)=2y+(x-z)^2.\end{cases}$$

Sistemul (2.20), în cazul acestor ecuaţii cu derivate parţiale, devine respectiv

$$\mathbf{1.}\quad\begin{cases}xy^2=C_1\\[2ex] 1+\ln x=C_2\end{cases},\qquad \mathbf{2.}\quad\begin{cases}x^2-z^2=C_1,\\[2ex] (x-z)^2=C_2.\end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme, găsim

$$\mathbf{1.}\begin{cases}x=e^{C_2-1}=\omega_1(C_1,C_2)\\[2ex] y=\sqrt{\dfrac{C_1}{e^{C_2-1}}}=\omega_2(C_1,C_2)\end{cases},\quad \mathbf{2.}\begin{cases}x=\dfrac{C_1+C_2}{2\sqrt{C_2}}=\omega_1(C_1,C_2),\\[2ex] z=\dfrac{C_1-C_2}{2\sqrt{C_2}}=\omega_2(C_1,C_2).\end{cases}$$

Conform Teoremei 2.1.3, avem că soluţia problemei lui Cauchy este

$$u(x,y,z)=\psi(\omega_1(\psi_1,\psi_2),\omega_2(\psi_1,\psi_2)).$$

Deoarece expresiile funcţiei ψ sunt respectiv

$$\mathbf{1.}\quad \psi(x,y)=x+y,\qquad \mathbf{2.}\quad \psi(x,z)=2z(z-x),$$

rezultă că soluţiile problemei lui Cauchy pentru cele două ecuaţii cu derivate parţiale sunt

$$\mathbf{1.}\quad u(x,y,z)=\omega_1(\psi_1,\psi_2)+\omega_2(\psi_1,\psi_2)$$

$$\mathbf{2.}\quad u(x,y,z)=2\omega_2(\psi_1,\psi_2)\Big(\omega_2(\psi_1,\psi_2)-\omega_1(\psi_1,\psi_2)\Big).$$

Efectuând calculele, găsim

$$\mathbf{1.}\quad u(x,y,z)=e^{\psi_2(x,y,z)-1}+\sqrt{\frac{\psi_1(x,y,z)}{e^{\psi_2(x,y,z)-1}}}$$

$$\mathbf{2.}\quad u(x,y,z)=\psi_2(x,y,z)-\psi_1(x,y,z).$$

Înlocuind pe ψ_1 şi ψ_2, obţinem $u(x,y,z)=xe^{z^{-2}-1}+y\sqrt{e^{1-z^{-2}}}$ şi respectiv $u(x,y,z)=2y+2z^2-2xz$. ■

2.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi, cuasiliniare

Definiţia 2.2.1. *O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi de forma*

$$X_1(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+X_n(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=X_{n+1}(\mathbf{x},u)\tag{2.22}$$

se numeşte **ecuaţie cuasiliniară neomogenă**.

O astfel de ecuaţie este liniară în raport cu derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei necunoscute u care depinde de variabilele $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (de variabila vectorială $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$), iar coeficienţii X_k sunt funcţii atât de variabila vectorială independentă $\mathbf{x}$ cât şi de funcţia u.

Vom presupune că funcţiile X_k, $k=1,2,\ldots,n$, sunt continue pe domeniul $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$, au derivate parţiale continue în D şi

$$\sum_{k=1}^{n}X_k^2(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)>0,\quad (\forall)\ (x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\in D.$$

2.2.1 Soluţia generală

Teorema 2.2.1. *Integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale (2.22) se reduce la integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale liniară cu $n+1$ variabile*

$$X_1(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_2}+\cdots+X_n(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+X_{n+1}(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial u}=0.$$

Demonstraţie. Să căutăm pentru ecuaţia cuasiliniară (2.22) o soluţie u, definită implicit de ecuaţia

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=0, \tag{2.23}$$

V fiind o funcţie necunoscută ce urmează să o determinăm. În ipoteza că V este continuă şi are derivate parţiale continue, cu derivata parţială în raport cu u diferită de zero în interiorul lui D, din (2.23) şi teorema de existenţă şi unicitate a funcţiilor reale de n variabile reale definite implicit de o ecuaţie în $n+1$ necunoscute, obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},\quad \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},$$

pe care le înlocuim în ecuaţia (2.22). În acest fel ajungem la

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X_{n+1}\frac{\partial V}{\partial u}=0, \tag{2.24}$$

care este o ecuaţie liniară şi omogenă în necunoscuta V. Fie

$$\psi_k(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=C_k,\quad k=0,1,2,\ldots,n-1, \tag{2.25}$$

n integrale prime independente ale ecuaţiei (2.24). Soluţia generală a ecuaţiei (2.24) este

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=\Phi(\psi_0,\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_{n-1}), \tag{2.26}$$

iar ecuaţia $V(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=0$ defineşte implicit soluţia ecuaţiei cuasiliniare (2.22) în forma $u=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Conform Teoremei 2.2.1, urmează că trebuie să determinăm n integrale prime ale sistemului caracteristic

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{du}{X_{n+1}},$$

ataşat ecuaţiei (2.24), anume

$$\begin{cases}\psi_0(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=C_0,\\ \psi_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=C_1,\\ \cdots,\\ \psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=C_{n-1}.\end{cases} \tag{2.27}$$

Atunci, soluţia generală a ecuaţiei (2.22) este funcţia definită implicit de

$$\Phi(\psi_0,\psi_1,\psi_2\cdots,\psi_{n-1})=0, \tag{2.28}$$

Φ fiind o funcţie arbitrară derivabilă şi cu derivate parţiale de ordinul întâi continue. **q.e.d.**

Exerciţiul 2.2.1. *Să se determine integrala generală a ecuaţiei cuasiliniare*

$$xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=(x^2+y^2)z.$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat acestei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi este

$$\frac{dx}{xy^2}=\frac{dy}{x^2y}=\frac{dz}{(x^2+y^2)z}.$$

Din primele două rapoarte obţinem ecuaţia $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}$ care ne conduce la integrala primă $x^2-y^2=C_0$.

O a doua integrală primă se obţine din combinaţia

$$\frac{ydx+xdy}{xy^3+x^3y}=\frac{dz}{(x^2+y^2)z}.$$

Primul raport al acestei combinaţii se obţine din primele două rapoarte ale sistemului caracteristic prin înmulţirea lor cu x, respectiv y, urmată de adunarea lor. Se obţine un nou raport egal cu celelalte rapoarte ale sistemului caracteristic. După înmulţirea cu x^2+y^2 se obţine

$$\frac{d(xy)}{xy}=\frac{dz}{z},$$

iar de aici rezultă a doua integrală primă $\dfrac{z}{xy}=C_1$.

Conform Teoremei 2.2.1, soluţia generală a ecuaţiei date este funcţia $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $\Phi(\psi_1,\psi_2)=0$, unde Φ este o funcţie arbitrară. Având în vedere expresiile lui ψ_1 şi ψ_2, avem că soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale cuasiliniară este funcţia $z=z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia

$$\Phi(x^2-y^2,\frac{z}{xy})=0.$$

Soluţia generală se poate scrie în forma $z=xy\Psi(x^2-y^2)$, unde Ψ este o funcţie reală arbitrară de o variabilă reală, derivabilă şi cu derivată continuă. ■

Exerciţiul 2.2.2. *Să se integreze ecuaţia cuasiliniară*

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=z+\frac{x_1x_2\cdots x_n}{z}.$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat acestei ecuaţii este

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\cdots=\frac{dx_n}{x_n}=\frac{zdz}{z^2+x_1x_2\cdots x_n}.$$

Se observă că avem următoarele combinaţii integrabile:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2},\quad \frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_3}{x_3},\quad \ldots,\quad \frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_n}{x_n}$$

şi

$$\frac{d(x_1x_2\cdots x_n)}{n\,x_1x_2\cdots x_n}=\frac{zdz}{z^2+x_1x_2\cdots x_n}. \tag{2.29}$$

Din integrarea primelor $n-1$ combinaţii integrabile obţinem integralele prime

$$\frac{x_2}{x_1}=C_1,\quad \frac{x_3}{x_1}=C_2,\quad \ldots\quad \frac{x_n}{x_1}=C_{n-1}.$$

Pentru a integra ultima combinaţie integrabilă notăm:

$$x_1x_2\cdots x_n=v;\quad z^2=u.$$

Astfel, combinaţia integrabilă (2.29) se reduce la

$$\frac{du}{dv}-\frac{2}{nv}\,u=\frac{2}{n}.$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi neomogenă şi integrala ei generală este

$$u=C_n\sqrt[n]{v^2}+\frac{2v}{n-2}$$

sau, dacă revenim la vechile variabile,

$$(n-2)z^2=C_n(n-2)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^2}+2x_1x_2\cdots x_n.$$

Integrala generală a ecuaţiei date este funcţia z definită implicit de

$$(n-2)z^2=2x_1x_2\cdots x_n+(n-2)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^2}\,\Phi\Big(\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\ldots,\frac{x_n}{x_1}\Big),$$

unde Φ este o funcţie diferenţiabilă arbitrară. ■

Exerciţiul 2.2.3. *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$(xy^3-2x^4)\frac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}=9z(x^3-y^3).$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat ecuaţiei este

$$\frac{dx}{x(y^3-2x^3)}=\frac{dy}{y(2y^3-x^3)}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}.$$

Considerând primele două rapoarte se obţine o ecuaţie diferenţială omogenă care integrată conduce la integrala primă

$$\frac{y^3+x^3}{y^2x^2}=C_0.$$

O a doua integrală primă se obţine din combinaţia integrabilă

$$\frac{ydx+xdy}{3xy^4-3x^4y}=\frac{dz}{9z(x^3-y^3)}.$$

Simplificând, obţinem ecuaţia cu variabile separate $\dfrac{d(xy)}{xy}+\dfrac{dz}{3z}=0$, care prin integrare conduce la a doua integrală primă $x^3y^3z=C_1$.

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$z=\frac{1}{x^3y^3}\,\Phi\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\Big),$$

unde Φ este o funcţie derivabilă arbitrară. ■

2.2.2 Problema lui Cauchy

Fie ecuaţia cu derivate parţiale cuasiliniară (2.22) şi punctul arbitrar, dar fixat, $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0) \in D$.

Definiţia 2.2.2. *Problema determinării unei soluţii u a ecuaţiei (2.22) într–o vecinătate U a punctului $M_0 \in D$, care pentru $x_n = x_{n0}$ să se reducă la funcţia continuă şi cu derivate parţiale continue $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, adică*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{2.30}$$

se numeşte **problema lui Cauchy** *a ecuaţiei (2.22).*

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy vom considera că s–au determinat n integrale prime independente funcţional într–o vecinătate a lui M_0, iar dacă presupunem că aceste integrale prime sunt cele din (2.27), ele vor fi independente dacă

$$\frac{D(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u)}\Big|_{M_0} \neq 0. \tag{2.31}$$

Vom cere ca soluţia căutată $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să treacă prin punctul M_0, deci $u_0 = \varphi(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.

Funcţia u, după cum am arătat la aliniatul precedent, este definită implicit de ecuaţia

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0$$

şi problema se reduce la determinarea funcţiei Φ, adică a legăturii între integralele prime (2.27). În acelaşi timp, u trebuie să fie unic determinată într–o vecinătate a punctului M_0, deci

$$\frac{\partial V}{\partial u}(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0) \neq 0.$$

Fie W o vecinătate a punctului M_0 în care sistemul (2.27) se poate inversa în funcţie de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$. Vom face însă inversarea după ce vom înlocui pe x_n cu x_{n0}, obţinând astfel sistemul

$$\begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = C_0, \\ \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = C_1, \\ \ldots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = C_{n-1}. \end{cases} \tag{2.32}$$

Prin rezolvarea sistemului (2.32) în privinţa variabilelor menţionate, găsim

$$\begin{cases} u = \omega_0(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ x_1 = \omega_1(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ \ldots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}). \end{cases} \tag{2.33}$$

Teorema 2.2.2. *Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia (2.22) care îndeplineşte condiţia iniţială (2.30) este funcţia u definită implicit de ecuaţia*

$$\omega_0(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}) - \psi[\omega_1(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1})] = 0, \tag{2.34}$$

unde $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime independente funcţional care satisfac condiţia (2.31).

Demonstraţie. Funcţia $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită implicit de ecuaţia (2.34) este o soluţie a ecuaţiei (2.22) deoarece provine dintr–o relaţie de forma (2.28).

Funcţia u dată de (2.34) verifică condiţia iniţială (2.30) deoarece conform lui (2.32) şi (2.33) pentru $x_n = x_{n0}$ avem

$$\omega_0(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})\Big|_{x_n = x_{n0}} = u,$$

$$\omega_k(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Din (2.34) rezultă că pentru $x_n = x_{n0}$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x_n = x_{n0}} = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Derivata funcţiei V din membrul întâi al relaţiei (2.34), în raport cu u, în punctul M_0, se găseşte că este egală cu 1, deci diferită de zero.

Fiind satisfăcute ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a unei funcţii reale de mai multe variabile reale definită implicit de ecuaţia (2.34), funcţia $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ există şi este unică. **q.e.d.**

Exerciţiul 2.2.4. *Să se găsească suprafaţa integrală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi neomogenă*

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

care trece prin curba

$$(C_a): \begin{cases} x = a, \\ 2ayz = a^2 + 2. \end{cases} \tag{2.35}$$

Soluţie. Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{x}. \tag{2.36}$$

Considerând primele două rapoarte, obţinem combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

din care obţinem integrala primă a sistemului $xy = C_0$.

Amplificând în sistemul (2.36) primul raport cu y, al doilea cu x şi raportul al treilea cu y^2, obţinem

$$\frac{ydx}{xy^2} = -\frac{xdy}{xy^2} = \frac{y^2dz}{xy^2}. \tag{2.37}$$

Aceste trei rapoarte, având acelaşi numitor, se scriusub forma

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1}.$$

Folosind proprietăţile rapoartelor egale, deducem

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1} = \frac{ydx - xdy}{2},$$

ultima egalitate fiind o combinaţie integrabilă căci se poate scrie în forma $d\left(\dfrac{x}{y}\right) = d(2z)$.

Integrând ultima combinaţie integrabilă, obţinem a doua integrală primă a sistemului (2.36)

$$2z - \frac{x}{y} = C_1.$$

Integrala generală a ecuaţiei este funcţia $z = z(x,y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$, unde

$$F(x,y,z) = \Phi(C_0, C_1) = \Phi(xy, 2z - \frac{x}{y}).$$

Observăm că integrala generală se mai poate scrie ca

$$z = \frac{x}{2y} + f(xy),$$

unde f este o funcţie reală de variabilă reală, arbitrară.

Ansamblul ecuaţiilor celor două integrale prime formează ecuaţiile unei curbe caracteristice (C) situată pe suprafaţa integrală (S).

Suprafaţa integrală căutată (S_a) se obţine eliminând pe x, y, z în sistemul format de ecuaţiile celor două integrale prime şi ecuaţiile curbei (C_a). Efectuând această eliminare, rezultă

$$C_1 = \frac{2}{C_0} \quad \Longrightarrow \quad z - \frac{x}{2y} = \frac{1}{xy} \quad \Longrightarrow \quad (S_a) \quad 2xyz - x^2 = 2$$

şi deci (S_a) este o suprafaţă algebrică de ordinul al treilea. ■

Exerciţiul 2.2.5. *Fie ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi cuasiliniară*

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Să se determine soluţia sa generală şi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţia iniţială

$$z(2,y) = 1 + y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2, \\ z = 1 + y^2. \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat este $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z - xy}$. Din primele două rapoarte se obţine integrala primă $\dfrac{x}{y} = C_0$.

Înmulţind primul raport cu y, al doilea cu x şi efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor, găsim un nou raport egal cu oricare din cele trei. Egalându–l cu primul raport, obţinem combinaţia integrabilă

$$\frac{d(xy + z)}{xy + z} = \frac{dx}{x}.$$

Integrând, obţinem a doua integrala primă $y + \dfrac{z}{x} = C_1$.

Rezultă că soluţia generală este funcţia definită implicit de ecuaţia

$$\Phi\Big(\frac{x}{y}, y + \frac{z}{x}\Big) = 0,$$

unde Φ este o funcţie arbitrară derivabilă şi cu derivate continue.

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy trebuie să rezolvăm mai întâi sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y} = C_0, \\[2ex] y + \dfrac{z}{2} = C_1, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} z = 2\Big(C_1 - \dfrac{2}{C_0}\Big) = \omega_0(C_0, C_1), \\[2ex] y = \dfrac{2}{C_0} = \omega_1(C_0, C_1). \end{cases}$$

Înlocuind pe y şi z în $z = 1 + y^2$ găsim relaţia care corespunde lui (2.34)

$$2\Big(C_1 - \frac{2}{C_0}\Big) - 1 - \frac{4}{C_0^2} = 0.$$

Dacă se înlocuiesc C_0 şi C_1 cu respectiv

$$\psi_0(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \psi_1(x, y, z) = y + \frac{z}{x},$$

deducem că soluţia problemei lui Cauchy este funcţia $z = \dfrac{(x + 2y)^2}{2x} - xy.$

După eliminarea numitorului, observăm că din punct de vedere geometric soluţia determinată reprezintă o suprafaţă algebrică de ordinul al treilea din care se scot intersecţiile acesteia cu planul Oyz. ■

Exerciţiul 2.2.6. *Să se determine suprafaţa integrală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi cuasiliniară neomogenă*

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y,$$

care conţine dreapta (d) *de ecuaţii* $x = y = z$.

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat ecuaţiei diferenţiale date este

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}, \tag{2.38}$$

căruia trebuie să–i determinăm două integrale prime funcţional independente. Pentru aceasta, căutăm combinaţii integrabile ale rapoartelor egale. Se observă că acestea sunt egale cu încă două

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{dx + dy + dz}{0} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0},$$

obţinute efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor (penultimul raport) şi suma numărătorilor pe suma numitorilor celor trei rapoarte din (2.38), înmulţite în prealabil cu x, y şi respectiv z.

Când într–o succesiune de rapoarte egale numitorul unui raport este zero, numărătorul acelui raport trebuie să fie, de asemenea, zero. Prin urmare,

$$dx + dy + dz = 0, \quad xdx + ydy + zdz = 0.$$

Din aceste egalităţi se obţin cele două integrale prime independente funcţional ale sistemului simetric (2.38)

$$x + y + z = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \tag{2.39}$$

Geometric, prima integrală primă reprezintă un fascicol de plane paralele de normală $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, iar cea de a doua este o familie de sfere concentrice cu centrul în originea reperului.

Soluţia generală a sistemului simetric (2.38) este ansamblul celor două integrale prime care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie dublu parametrică de cercuri în spaţiu, care sunt curbele caracteristice.

Pentru a determina suprafaţa integrală care conţine dreapta (d), impunem condiţia ca sistemul format de ecuaţiile curbelor caracteristice şi ecuaţiile dreptei să fie compatibil, ceea ce conduce la *relaţia de compatibilitate* $C_1^2 - 3C_2 = 0$.

Înlocuind C_1 şi C_2 în relaţia de compatibilitate cu expresiile lor din (2.39) se găseşte că suprafaţa integrală căutată este conul pătratic (eliptic) cu vârful în origine de ecuaţie $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0.$ ■

Capitolul 3

Elemente de teoria câmpurilor

3.1 Câmpuri scalare. Curbe şi suprafeţe de nivel

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu tridimensional, $M(x, y, z)$ un punct oarecare din D şi $f \in \mathcal{F}(D)$ o funcţie reală definită pe D. Valorile funcţiei f, scrise în forma $f(M)$, sau în forma $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$, unde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in D$, sunt numere reale sau *scalari*. Astfel, funcţia f se mai numeşte şi *funcţie scalară*.

Definiţia 3.1.1. *Funcţia scalară $f \in \mathcal{F}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$, se numeşte* **câmp scalar tridimensional**.

Dacă domeniul D este bidimensional, deci $D \subset \mathbb{R}^2$, sau D este o porţiune de suprafaţă mărginită de o curbă în spaţiu, poziţia punctului $M \in D$ va fi determinată de doi parametri (coordonatele carteziene x şi y ale punctului din plan în primul caz, sau coordonatele curbilinii u şi v ale punctului situat pe o suprafaţă în cel de al doilea caz). După caz, vom scrie: $f(M) = f(x, y)$; $f(M) = f(u, v)$. În ambele cazuri, funcţia scalară $f \in \mathcal{F}(D)$ se numeşte *câmp scalar bidimensional*.

În cele ce urmează vom presupune că funcţia f este continuă pe D şi admite derivate parţiale de orice ordin continue în D.

Exemplul 3.1.1. *Câmpul temperaturilor $T = T(M)$ într–o regiune tridimensională sau bidimensională şi câmpul presiunilor $p = p(M)$ într–un domeniu plan sau spaţial sunt exemple de câmpuri scalare.*

Exemplul 3.1.2. *Funcţia reală de două variabile reale*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(M) = f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*, \tag{3.1}$$

este un câmp scalar bidimensional.

Exemplul 3.1.3. *Funcţia reală de trei variabile reale*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(M) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3.2}$$

este un câmp scalar definit în întreg spaţiu tridimensional.

Fie câmpul scalar $f(M)$, $M \in D \subset \mathbb{R}^3$ şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ fixat.

Definiţia 3.1.2. *Se numeşte* **suprafaţă de nivel** *care trece prin M_0 a câmpului scalar tridimensional $f(M)$, locul geometric S_0 al punctelor $M \in D$ cu proprietatea*

$$f(M) = f(M_0) \tag{3.3}$$

sau, având în vedere coordonatele carteziene ale punctelor M şi M_0,

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0). \tag{3.4}$$

Deoarece M_0 este un punct al suprafeţei de nivel S_0, ecuaţia acesteia este (3.3) sau (3.4).

Observaţia 3.1.1. *Prin orice punct $M_0 \in D$ trece o suprafaţă de nivel a câmpului scalar tridimensional $f \in \mathcal{F}(D)$, iar orice două suprafeţe de nivel ale sale ori sunt identice, ori nu au nici un punct comun.*

Exemplul 3.1.4. *Suprafeţele de nivel ale câmpului termic dintr–o regiune tridimensională sunt* **izotermele***; cele ale câmpului presiunilor sunt* **izobarele***; suprafeţele de nivel ale câmpului scalar (3.2) sunt sfere cu centrele în origine.*

Definiţia 3.1.3. *Prin* **curbă de nivel** *a câmpului scalar bidimensional $f \in \mathcal{F}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ (sau $D \subset \Sigma$, unde Σ este o suprafaţă), se înţelege locul geometric al punctelor $M(x, y) \in D$ (sau $M(u, v) \in D \subset \Sigma$) cu proprietatea*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \text{sau} \quad (f(u, v) = f(u_0, v_0)), \tag{3.5}$$

unde $M_0(x_0, y_0)$, (sau $M_0(u_0, v_0)$,) sunt puncte oarecare, dar fixate, din D.

Observaţia 3.1.2. *Prin orice punct $M_0 \in D$ trece câte o curbă de nivel şi oricare două asemenea curbe sau coincid, sau nu au puncte comune.*

Exemplul 3.1.5. *Curbele de nivel ale câmpului scalar (3.1) sunt elipse omofocale, cu centrul de simetrie în origine, care au axele de coordonate ca axe de simetrie şi semiaxele $a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}$ şi $b\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2}}$.*

O primă imagine a unui câmp scalar este dată de suprafeţele (curbele) sale de nivel care arată modul cum sunt stratificate valorile câmpului, viteza de stratificare într–un punct fiind tocmai derivata după o direcţie oarecare de versor $\mathbf{s}$ a câmpului în punctul considerat.

3.2 Derivata după o direcţie şi gradientul unui câmp scalar

Să considerăm câmpul scalar $f \in \mathcal{F}(D)$, $\mathbf{s}$ un versor arbitrar şi, pentru fiecare punct $\mathbf{x} \in D$, definim funcţia reală g de variabila reală t

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}), \quad t \in I, \quad \mathbf{x} + t\mathbf{s} \in D, \tag{3.6}$$

unde I este un interval real.

Evident, avem o infinitate de funcţii g (pentru fiecare $\mathbf{x} \in D$ există o asemenea funcţie) şi pentru toate, avem $g(0) = f(\mathbf{x})$. Funcţiile g sunt restricţiile funcţiei f la dreapta care trece prin $\mathbf{x}$ şi are direcţia $\mathbf{s}$.

Presupunem că, pentru orice $\mathbf{x} \in D$, funcţia g corespunzătoare este derivabilă în $t = 0$.

Definiţia 3.2.1. *Spunem că funcţia f este* **derivabilă în D după direcţia $\mathbf{s}$** *dacă funcţiile g, definite în (3.6), sunt derivabile în $t = 0$.*

Definiţia 3.2.2. *Dacă f este derivabilă în D după direcţia $\mathbf{s}$, numărul real $g'(0)$ se numeşte* **derivata câmpului scalar f după direcţia $\mathbf{s}$ în punctul $\mathbf{x} \in D$.**

Notăm această derivată cu $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})$. Prin urmare,

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{s})-f(\mathbf{x})}{t}. \tag{3.7}$$

Definiţia 3.2.3. *Funcţia $\dfrac{df}{d\mathbf{s}} \in \mathcal{F}(D)$ ale cărei valori se determină după legea (3.7), se numeşte* **derivata câmpului scalar f după direcţia $\mathbf{s}$.**

Observaţia 3.2.1. *Fiind definite cu ajutorul derivatelor unei funcţii reale de o variabilă reală, proprietăţile derivatelor după o direcţie ale câmpurilor scalare sunt aceleaşi ca cele ale derivatelor funcţiilor reale de o variabilă reală.*

În consecinţă, putem scrie (pentru simplificare, omitem variabila $\mathbf{x}$):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\dfrac{df_1}{d\mathbf{s}} + \lambda_2\dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}; \\[2ex] \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(f_1\cdot f_2) = \dfrac{df_1}{d\mathbf{s}}\cdot f_2 + f_1\cdot\dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}; \\[2ex] \dfrac{d}{d\mathbf{s}}\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right) = \dfrac{\dfrac{df_1}{d\mathbf{s}}\cdot f_2 - f_1\cdot\dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}}{f_2^2}; \\[2ex] \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(F(f)) = F'(f)\cdot\dfrac{df}{d\mathbf{s}}, \end{cases} \tag{3.8}$$

unde f_1, f_2 şi f sunt câmpuri scalare derivabile în D după direcţia $\mathbf{s}$, iar $F(f) = F\circ f$ este compusa funcţiei f cu funcţia F.

Deoarece am presupus că funcţia f care defineşte un câmp scalar are derivate parţiale continue în D, rezultă că f este diferenţiabilă în D şi valoarea în $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ a diferenţialei funcţiei f în punctul $\mathbf{x} \in D$ este

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x},\mathbf{h}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x})\cdot\mathbf{h}, \tag{3.9}$$

unde

$$(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\,\mathbf{k} \tag{3.10}$$

este *gradientul* funcţiei f în punctul $\mathbf{x} \in D$. Între gradientul funcţiei f şi vectorul $\mathbf{h}$ se efectuează *produsul scalar standard* a doi vectori din $\mathbb{R}^3$.

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})h_3. \tag{3.11}$$

Operatorul diferenţial $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ se numeşte *operatorul lui Hamilton*[1] sau *operatorul nabla*.

Pe de altă parte, se ştie că dacă f este diferenţiabilă în D, atunci f este derivabilă în D după orice direcţie şi derivata sa după direcţia $\mathbf{s}$ într–un punct $\mathbf{x} \in D$ este valoarea în $\mathbf{s}$ a diferenţialei funcţiei f în punctul $\mathbf{x}$. Prin urmare,

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = df(\mathbf{x})(\mathbf{s}). \tag{3.12}$$

Din (3.9) şi (3.12) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}, \tag{3.13}$$

iar din (3.10) şi (3.13) rezultă

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\, s_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\, s_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\, s_3. \tag{3.14}$$

Fie P punctul din D al cărui vector de poziţie este $\mathbf{x} + t\mathbf{s}$. Conform Observaţiei 3.1.1, prin punctul P trece o suprafaţă de nivel (S) a câmpului scalar f. Dreapta (d) care trece prin M şi are direcţia $\mathbf{s}$, intersectează suprafaţa (S) în punctul P. Astfel, t este abscisa curbilinie a punctului P de pe dreapta (d) pe care M este originea elementului de arc. Dacă notăm cu $t = \ell(MP)$ lungimea arcului MP, formula (3.7) se rescrie în forma

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\ell(MP)\to 0\\ P\in(d)}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}. \tag{3.15}$$

Considerăm acum că punctul $P \in (S)$ nu este pe dreapta (d), ci pe o curbă netedă arbitrară Γ care trece prin M şi are versorul tangentei în M identic cu $\mathbf{s}$.

Definiţia 3.2.4. *Se numeşte* **variaţie medie** *a câmpului scalar f, raportul*

$$\frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}, \tag{3.16}$$

unde $P \in \Gamma \cap (S)$ iar $\ell(MP)$ este abscisa curbilinie a punctului P.

Teorema 3.2.1. *Limita variaţiei medii (3.16) a câmpului scalar f atunci când P tinde, pe curba Γ, la punctul $M(\mathbf{x})$, este egală cu derivata în $\mathbf{x}$ după direcţia $\mathbf{s}$ a câmpului scalar f.*

Demonstraţie. Evaluarea diferenţei de la numărătorul variaţiei medii, conduce la

$$f(P) - f(M) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}), \tag{3.17}$$

unde $\boldsymbol{\varepsilon}$ este o funcţie vectorială de variabilă vectorială cu proprietatea

$$\lim_{P\to M} \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \tag{3.18}$$

cu menţiunea că punctul P, în acest proces de trecere la limită, se află pe curba Γ.

[1] Hamilton, William Rowan (1805 – 1865), fizician, astronom şi matematician irlandez.

Dacă împărţim (3.17) prin $\ell(MP)$, trecem la limită pentru $P \to M$, ceea ce este echivalent cu $\ell(MP) \to 0$, ţinem cont de (3.18), (3.14) şi de rezultatul

$$\lim_{\substack{\ell(MP)\to 0\\ P\in\Gamma}} \frac{\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}}{\ell(MP)} = \mathbf{s},$$

din geometria diferenţială, se deduce

$$\lim_{\substack{\ell(MP)\to 0\\ P\in\Gamma}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)} = \frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \tag{3.19}$$

ceea ce demonstrează teorema. **q.e.d.**

Observaţia 3.2.2. *Relaţia (3.19) se poate lua ca definiţie pentru derivata după direcţia* $\mathbf{s}$ *a câmpului scalar* f *în punctul* $\mathbf{x} \in D$.

Ne propunem să determinăm acea direcţie a spaţiului după care derivata câmpului scalar f în punctul $\mathbf{x}$ este maximă.

Ţinând cont că produsul scalar a doi vectori din $\mathbb{R}^3$ este egal cu produsul dintre normele vectorilor şi cosinusul unghiului θ dintre ei şi că $\|\mathbf{s}\| = 1$, din (3.13) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \|(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x})\| \cdot \cos\theta. \tag{3.20}$$

Din (3.20) se vede că derivata este maximă când $\theta = 0$, adică atunci când versorul $\mathbf{s}$ este versorul $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ al vectorului $(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x})}{\|(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x})\|}. \tag{3.21}$$

Pentru a demonstra o proprietate remarcabilă a versorului (3.21) să presupunem că M este fixat şi notat cu M_0 şi că vectorul său de poziţie este $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Fie $\gamma_0 \subset (S_0)$ o curbă netedă arbitrară care trece prin M_0 şi care are tangenta $\mathbf{t}_0$ în M_0. Dacă $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ sunt ecuaţiile parametrice ale curbei γ_0 şi punctul M_0 corespunde lui t_0 pe curba γ_0, atunci

$$\mathbf{t}_0 = \frac{d\varphi}{dt}(t_0)\,\mathbf{i} + \frac{d\psi}{dt}(t_0)\,\mathbf{j} + \frac{d\chi}{dt}(t_0)\,\mathbf{k}. \tag{3.22}$$

Cum curba γ_0 este situată pe (S_0), unde (S_0) este suprafaţa de nivel care trece prin M_0 de ecuaţie $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$, avem

$$f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = f(x_0, y_0, z_0). \tag{3.23}$$

Dacă derivăm (3.23) ca o funcţie compusă şi considerăm $t = t_0$, deducem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\,\frac{d\varphi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\,\frac{d\psi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_0)\,\frac{d\chi}{dt}(t_0) = 0. \tag{3.24}$$

Din (3.10), (3.21), (3.22) şi (3.24), obţinem

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_0 = 0,$$

care demonstrează că $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este ortogonal tuturor tangentelor în M_0 la toate curbele $\gamma_0 \subset (S_0)$ care trec prin M_0. Cum locul geometric al acestor tangente este planul tangent în M_0 la suprafaţa (S_0), rezultă că $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este versorul normalei în M_0 la suprafaţa de nivel (S_0). Sensul versorului $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este spre acea parte a spaţiului în care $f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0)$. Aşadar:

Teorema 3.2.2. *Derivata câmpului scalar f după direcţia $\mathbf{s}$ în punctul $\mathbf{x}_0$ este maximă după direcţia versorului $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ a normalei în M_0 la suprafaţa de nivel (S_0) care trece prin M_0, sensul normalei fiind sensul creşterii valorilor câmpului scalar f.*

Revenind la un punct arbitrar $\mathbf{x} \in D$, obţinem că derivata după direcţia normalei $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ în punctul M la suprafaţa de nivel care trece prin M are expresia

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{3.25}$$

Cu ajutorul lui (3.21), din (3.25) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \|(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x})\|. \tag{3.26}$$

Cum gradientul câmpului scalar f în punctul $\mathbf{x}$ este coliniar şi de acelaşi sens cu $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, din (3.26) obţinem

$$(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x})\, \mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{3.27}$$

Să mai observăm că folosind (3.20) şi (3.25) putem scrie

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cos\theta, \tag{3.28}$$

unde θ este unghiul dintre versorii $\mathbf{s}$ şi $\mathbf{n}$.

Formula (3.28) dă legătura între derivata după un versor oarecare $\mathbf{s}$ şi derivata după direcţia normalei în punctul M la suprafaţa de nivel care trece prin M, ocazie cu care reîntâlnim concluzia Teoremei 3.2.2.

Din (3.27) deducem că regulile de calcul pentru gradient sunt aceleaşi cu regulile de calcul ale derivatei după o direcţie. Dacă avem în vedere (3.8) şi renunţăm la scrierea variabilei vectoriale $\mathbf{x}$, se pot scrie relaţiile:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\boldsymbol{\nabla}\varphi + \mu\boldsymbol{\nabla}\psi, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \\ \boldsymbol{\nabla}(\varphi\psi) = \psi\boldsymbol{\nabla}\varphi + \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi; \\ \boldsymbol{\nabla}\Big(\dfrac{\varphi}{\psi}\Big) = \dfrac{\psi\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi}{\psi^2}, \quad \psi \neq 0; \\ \boldsymbol{\nabla} F(\varphi) = F'(\varphi)\boldsymbol{\nabla}\varphi. \end{cases} \tag{3.29}$$

Mai precizăm că pentru gradientul câmpului scalar φ se folosoşte şi notaţia $\operatorname{grad}\varphi$.

Exerciţiul 3.2.1. *Se dă câmpul scalar*

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^2},$$

unde

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Să se calculeze unghiul dintre vectorii $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A)$ şi $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B)$, unde A şi B sunt puncte de coordonate $A(2,1,1)$ şi $B(0,1,-1)$.

Soluţie. Dacă aplicăm regulile de calcul (3.29), găsim că gradientul câmpului scalar φ în punctul oarecare $M(x,y,z)$, diferit de originea reperului $Oxyz$, este

$$(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M) = -2\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^4}\,\mathbf{r} + \frac{1}{r^2}\,\mathbf{a},$$

de unde rezultă $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A) = -\dfrac{1}{18}(2\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+7\,\mathbf{k})$ şi $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B) = \dfrac{1}{2}(2\,\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$. Cum cosinusul unghiului θ dintre doi vectori este raportul dintre produsul scalar al lor şi produsul normelor acestora, obţinem

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B)}{\|(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A)\|\,\|(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B)\|} = -\frac{5}{9}.$$

Semnul minus dovedeşte că unghiul dintre cei doi gradienţi este obtuz. ■

Exerciţiul 3.2.2. *Fie câmpul scalar* $\varphi(x,y,z) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2 + (\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2$, *unde* $\mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ *este vectorul de poziţie al punctului* $M(x,y,z)$, *iar* $\mathbf{a}$ *este un versor constant.*

a) Să se determine suprafaţa de nivel care trece prin $M_0(1,2,3)$.

b) Să se calculeze derivata câmpului scalar φ *după direcţia de parametri directori* $(2,-1,2)$ *în punctul* M_0.

Soluţie. Deoarece $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2 = a^2r^2\cos^2\theta$ şi $(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2 = a^2r^2\sin^2\theta$, iar $a^2 = 1$, deducem că valorile câmpului scalar sunt $\varphi(x,y,z) = r^2 = x^2+y^2+z^2$.

a) Suprafaţa de nivel care trece prin $M_0(1,2,3)$ este $x^2+y^2+z^2 = 14$, adică sfera de rază $R=\sqrt{14}$ şi cu centrul în origine.

b) Versorul $\mathbf{s}$ al vectorului $\mathbf{v}$ de parametri directori $(2,-1,2)$ este

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Gradientul câmpului scalar φ în punctul M_0 este

$$(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M) = (\operatorname{grad}\varphi)(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k},$$

de unde

$$(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M_0) = (\operatorname{grad}\varphi)(1,2,3) = 2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}).$$

Derivata funcţiei φ în punctul M_0 după direcţia $\mathbf{s}$ este

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{s}}(M_0) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M_0)\cdot\mathbf{s} = 2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot\frac{1}{3}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(2-2+6) = 4.$$

Rezultă că unghiul θ dintre vectorii $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M_0)$ şi $\mathbf{s}$ este ascuţit. ■

3.3 Câmpuri vectoriale. Linii şi suprafeţe de câmp

Definiţia 3.3.1. *Se numeşte* **câmp vectorial** *o funcţie vectorială de variabilă vectorială definită pe un domeniu* $D\subset\mathbb{R}^3$.

Funcţia vectorială $\mathbf{v}$ care defineşte un câmp vectorial pe $D\subset\mathbb{R}^3$ se poate scrie în una din formele:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P);\quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r});\quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x});\quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x,y,z), \tag{3.30}$$

unde $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului $P\in D$, care, în reperul $\mathcal{R} = \{O;\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, are expresia analitică

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \tag{3.31}$$

unde O este originea reperului, iar $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ este o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

Notând

$$\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}, \tag{3.32}$$

unde $v_m = v_m(x,y,z),\;\; m = 1,2,3,$ observăm că studiul unei funcţii vectoriale de trei variabile reale (sau de variabilă vectorială), adică a unui câmp vectorial, se reduce la studiul a trei funcţii reale de trei variabile reale (a trei câmpuri scalare tridimensionale).

În cele ce urmează, vom presupune că funcţia vectorială care defineşte un câmp vectorial pe domeniul tridimensional D este continuă, are derivate parţiale continue în D care nu se anulează în nici un punct din D.

Definiţia 3.3.2. *Se numeşte* **linie de câmp în** D **a câmpului vectorial** $\mathbf{v}$, *o curbă strâmbă* $(L) \subset D$ *cu proprietatea că tangenta în fiecare punct* $P \in (L)$ *are ca vector director pe* $\mathbf{v}(P)$.

Cum un alt vector director al tangentei în punctul $P(x,y,z) \in (L)$ este diferenţiala vectorului (3.31)

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k} \tag{3.33}$$

avem că $\mathbf{v}$ şi $d\mathbf{r}$ sunt vectori directori ai aceleiaşi drepte, adică ei sunt coliniari.

În concluzie, coordonatele acestor doi vectori directori trebuie să fie proporţionale şi deci

$$\frac{dx}{v_1(x,y,z)} = \frac{dy}{v_2(x,y,z)} = \frac{dz}{v_3(x,y,z)}. \tag{3.34}$$

Definiţia 3.3.3. *Sistemul simetric* (3.34) *se numeşte* ***sistemul diferenţial al liniilor de câmp*** *în* D *a câmpului vectorial* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, *unde* $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ *este spaţiul liniar al funcţiilor vectoriale definite pe domeniul* D.

Observaţia 3.3.1. *În baza teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei unui sistem simetric, rezultă că prin orice punct al domeniului* D *trece câte o singură linie de câmp a câmpului vectorial* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$.

Definiţia 3.3.4. *Se numeşte* **suprafaţă de câmp** *a unui câmp vectorial, orice suprafaţă generată de o linie de câmp a acelui câmp vectorial.*

Teorema 3.3.1. *Condiţia necesară şi suficientă ca o suprafaţă* (S) *să fie suprafaţă de câmp a câmpului vectorial* $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ *este ca vectorul* $\mathbf{v}(P)$ *să fie conţinut în planul tangent la suprafaţa* (S) *în punctul* $P \in (S)$.

Demonstraţie. **Necesitatea**. O linie de câmp (G) a câmpului vectorial $\mathbf{v}$ este ansamblul a două integrale prime independente funcţional ale sistemului simetric (3.34)

$$(G) \quad \begin{cases} \psi_1(x,y,z) = C_1 \\ \psi_2(x,y,z) = C_2, \end{cases} \tag{3.35}$$

unde ψ_1, ψ_2 sunt două integrale prime independente funcţional.

Pentru ca (G) din (3.35) să genereze o suprafaţă, parametrii C_1 şi C_2 trebuie să fie legaţi printr–o relaţie de forma

$$\Phi(C_1, C_2) = 0, \tag{3.36}$$

numită *relaţie de condiţie* şi că, suprafaţa de câmp corespunzătoare condiţiei (3.36) se obţine eliminând constantele arbitrare C_1 şi C_2 între (3.35) şi (3.36). Obţinem

$$\Phi(\psi_1(x,y,z),\psi_2(x,y,z)) = 0, \tag{3.37}$$

deci o ecuaţie de forma

$$(S): \quad F(x,y,z) = 0 \tag{3.38}$$

în care recunoaştem ecuaţia carteziană implicită a unei suprafeţe (S). În plus, în orice punct $P \in (S)$, vectorul $\mathbf{v}(P)$ este tangent suprafeţei de ecuaţie (3.37) şi deci conţinut în planul tangent în P la suprafaţa (S), deoarece $\mathbf{v}(P)$ este tangent la linia de câmp care trece prin P şi generează suprafaţa (S).
Suficienţa. Trebuie să arătăm că orice suprafaţă (S) de ecuaţie (3.38) cu proprietatea că $\mathbf{v}(P)$ este conţinut în planul tangent în punctul P la (S) este generată de liniile de câmp ale câmpului vectorial $\mathbf{v}$.

Ecuaţia (3.38) poate fi considerată ca o suprafaţă de nivel a câmpului scalar F.

Se ştie că un vector coliniar şi de acelaşi sens cu sensul de creştere al funcţiei F în punctul $P(x,y,z) \in (S)$ este

$$(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,\mathbf{k}. \tag{3.39}$$

Deoarece vectorul (3.39) este ortogonal vectorului $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ conţinut în planul tangent în P la suprafaţa (S),rezultă că produsul lor scalar este nul, deci

$$v_1(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + v_2(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + v_3(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0, \tag{3.40}$$

ceea ce arată că funcţia $F(x,y,z)$ din (3.38) verifică o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi omogenă. Dar orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.40) este generată de curbele integrale ale sistemului caracteristic asociat, adică de (3.34), iar curbele caracteristice ale sale sunt liniile de câmp ale câmpului vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}^3)$. Teorema este astfel demonstrată. **q.e.d.**

Definiţia 3.3.5. *Câmpul vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}^3)$ se numeşte* **biscalar** *dacă există funcţia scalară derivabilă $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ şi funcţia diferenţiabilă $F \in \mathcal{F}(D)$, astfel încât să avem*

$$\mathbf{v} = \varphi\, grad\, F = \varphi \boldsymbol{\nabla} F. \tag{3.41}$$

Derivata după o direcţie $\mathbf{s}$ a unui câmp vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}^3)$ într–un punct $\mathbf{x} \in D$ se defineşte la fel ca la câmpurile scalare

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathbf{v}(\mathbf{x}+t\mathbf{s}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{t}. \tag{3.42}$$

Dacă funcţia $\mathbf{v}$ are derivate parţiale de ordinul întâi continue, existenţa limitei (3.42) este asigurată şi

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{dv_1}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})\,\mathbf{i} + \frac{dv_2}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})\,\mathbf{j} + \frac{dv_3}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})\,\mathbf{k}. \tag{3.43}$$

Dacă se ţine cont de (3.14), (3.43) devine

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = s_1\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{x}) + s_2\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(\mathbf{x}) + s_3\,\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}(\mathbf{x}). \tag{3.44}$$

Relaţia (3.44) constituie *expresia carteziană* a derivatei câmpului vectorial $\mathbf{v}$, în punctul $\mathbf{x} \in D$, după direcţia de versor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, expresie care se mai poate scrie în forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \Big(s_1\,\frac{\partial}{\partial x} + s_2\,\frac{\partial}{\partial y} + s_3\,\frac{\partial}{\partial z}\Big)\mathbf{v}. \tag{3.45}$$

Deoarece operatorul $s_1\,\dfrac{\partial}{\partial x}+s_2\,\dfrac{\partial}{\partial y}+s_3\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ poate fi interpretat formal ca produsul scalar dintre $\mathbf{s}$ şi operatorul vectorial $\boldsymbol{\nabla}$, se poate adopta convenţia de scriere

$$\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nabla}=s_1\,\frac{\partial}{\partial x}+s_2\,\frac{\partial}{\partial y}+s_3\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.46}$$

Cu această convenţie şi cu renunţarea la menţionarea variabilei $\mathbf{x}$, formula de calcul (3.45) ia forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}=(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}. \tag{3.47}$$

Exerciţiul 3.3.1. *Să se determine derivata câmpului vectorial* $\mathbf{v}(x,y,z)=xy^2\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+z(x^2+y^2)\mathbf{k}$ *după direcţia de parametri directori* $(1,3,-1)$*. Care este locul geometric al punctelor din spaţiu pentru care derivata după direcţia* $\mathbf{s}$ *este normală vectorului* $\mathbf{v}=(1,1,1)$*?*

Soluţie. Să calculăm versorul direcţiei menţionate. Fiindcă norma vectorului $\mathbf{v}$ este $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}=\sqrt{11}$, rezultă că versorul direcţiei după care trebuie să derivăm este $\mathbf{s}=\dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}=\dfrac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})$.

Folosind (3.47), găsim

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}=\frac{1}{\sqrt{11}}\Big[(y^2+6xy)\mathbf{i}+(2xy+3x^2)\mathbf{j}+(2xz+6yz-x^2-y^2)\mathbf{k}\Big].$$

Pentru a determina locul geometric cerut, impunem condiţia de ortogonalitate $\dfrac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}\cdot\mathbf{v}=0$ şi obţinem ecuaţia $x^2+4xy+xz+3xz=0$ ce reprezintă ecuaţia unei cuadrice (suprafaţă algebrică de ordinul al doilea).

Analizând invarianţii cuadricei constatăm că locul geometric este un con pătratic cu vârful în origine. ■

Exerciţiul 3.3.2. *Să se determine liniile de câmp ale câmpurilor vectoriale:*

$\mathbf{1^0}$. $\mathbf{v}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathbf{k}$;

$\mathbf{2^0}$. $\mathbf{v}(x,y,z)=(xy-2z^2)\mathbf{i}+(4xz-y^2)\mathbf{j}+(yz-2x^2)\mathbf{k}$;

$\mathbf{3^0}$. $\mathbf{v}(x,y,z)=(xz-y)\mathbf{i}+(yz-x)\mathbf{j}+(z^2-1)\mathbf{k}$;

$\mathbf{4^0}$. $\mathbf{v}(x,y,z)=(x+y)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$.

Soluţie. Liniile de câmp sunt curbele integrale ale respectiv sistemelor simetrice:

$$\mathbf{1^0}.\quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\mathbf{2^0}.\quad \frac{dx}{xy-2z^2}=\frac{dy}{4xz-y^2}=\frac{dz}{yz-2x^2};$$

$$\mathbf{3^0}.\quad \frac{dx}{xz-y}=\frac{dy}{yz-x}=\frac{dz}{z^2-1};$$

$$\mathbf{4^0}.\quad \frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{y-x}=\frac{dz}{-2z}.$$

Se obţin combinaţiile integrabile:

$$\mathbf{1^0}.\quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\qquad xdx+ydy+(z-\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz=0;$$

$$\mathbf{2^0}.\quad ydx+xdy+2zdz=0,\qquad 2xdx+zdy+ydz=0;$$

$$\mathbf{3^0}.\quad \frac{dx-dy}{(x-y)(1+z)}=\frac{dz}{z^2-1},\qquad \frac{xdx-ydy}{(x^2-y^2)z}=\frac{dz}{z^2-1};$$

$$\mathbf{4^0}.\quad \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{-2z},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x},$$

care conduc respectiv la integralele prime:

$$\mathbf{1^0}.\quad \frac{y}{x}=C_1,\qquad z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C_2;$$

$$\mathbf{2^0}.\quad z^2+xy=C_1,\qquad x^2+yz=C_2;$$

$$\mathbf{3^0}.\quad \frac{x-y}{z-1}=C_1,\qquad \frac{x+y}{z+1}=C_2;$$

$$\mathbf{4^0}.\quad (x^2+y^2)z=C_1,\quad \ln{(x^2+y^2)}+2\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}=C_2.$$

Curbele integrale ale sistemelor simetrice de mai sus sunt:

$$\mathbf{1^0}.\begin{cases}\dfrac{y}{x}=C_1\\ z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C_2\end{cases};\quad \mathbf{2^0}.\begin{cases}z^2+xy=C_1\\ x^2+yz=C_2\end{cases};$$

$$\mathbf{3^0}.\begin{cases}\dfrac{x-y}{z-1}=C_1\\ \dfrac{x+y}{z+1}=C_2\end{cases};\quad \mathbf{4^0}.\begin{cases}(x^2+y^2)z=C_1\\ \ln{(x^2+y^2)}+2\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}=C_2.\end{cases}$$

Primul câmp vectorial are liniile de câmp la intersecţia planelor $y=C_1x$ cu paraboloizii de rotaţie în jurul axei Oz de ecuaţie

$$z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C_2.$$

De menţionat că fiecare plan al familiei $y=C_1x$ nu trebuie să conţină dreapta de intersecţie a acestuia cu planul Oyz.

Liniile de câmp al celui de al doilea câmp vectorial se găsesc la intersecţia hiperboloizilor:

$$z^2+xy=C_1;\quad x^2+yz=C_2.$$

Al treilea câmp vectorial are liniile de câmp drepte rezultate din intersecţia familiilor de plane:

$$x-y=C_1(z-1);\quad x+y=C_2(z+1).$$

Din fiecare dreaptă se scot punctele de cote -1 şi 1.

Curbele de intersecţie ale suprafetelor de rotaţie în jurul axei Oz, de ecuaţii $z=\dfrac{C_1}{x^2+y^2}$, şi suprafeţele cilindrice cu generatoarele paralele cu axa Oz, de ecuaţii $\ln{(x^2+y^2)}+2\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}=C_2$, reprezintă liniile de câmp ale ultimului câmp vectorial. ■

Exerciţiul 3.3.3. *Să se determine suprafeţele de câmp ale câmpurilor vectoriale de mai jos care trec prin curbele* (Γ) *specificate alăturat*

$$\mathbf{1}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + (x^2+y^2)z\,\mathbf{k},\qquad (\Gamma):\begin{cases} x = 2y,\\ z = 1,\end{cases}$$

$$\mathbf{2}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - x^2 - y^2 + 1)\mathbf{k},\qquad (\Gamma):\begin{cases} x - z = a^2,\\ x^2 + y^2 = a^2 - 1,\end{cases}$$

$$\mathbf{3}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + (x^2+y^2+z^2)\,\mathbf{k},\qquad (\Gamma):\begin{cases} x = 1,\\ z = y^2,\end{cases}$$

$$\mathbf{4}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z - x^2\sin y)\,\mathbf{k},\qquad (\Gamma):\begin{cases} x = y^2,\\ z = 0.\end{cases}$$

Soluţie. Sistemele diferenţiale ale liniilor de câmp sunt:

$$\mathbf{1}.\qquad \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)};$$

$$\mathbf{2}.\qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2 + 1};$$

$$\mathbf{3}.\qquad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x^2+y^2+z^2};$$

$$\mathbf{4}.\qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2\sin y}.$$

1. O combinaţie integrabilă a primului sistem simetric este dată de primele două rapoarte egale care, după simplificare cu x^2y^2, conduce la $xdx - ydy = 0$ şi din care se obţine integrala primă $x^2 - y^2 = C_1$.

O a doua combinaţie integrabilă se obţine scriind

$$\frac{\dfrac{dx}{x}}{y^2} = \frac{\dfrac{dy}{y}}{x^2} = \frac{\dfrac{dz}{z}}{x^2+y^2}.$$

Dacă ultimul raport îl egalăm cu suma primelor două, după simplificarea cu x^2+y^2, obţinem combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

care furnizează a doua integrală primă independentă

$$\frac{z}{xy} = C_2.$$

Atunci, generatoarele (G) ale suprafeţei de câmp au ecuaţiile

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1\\ \dfrac{z}{xy} = C_2.\end{cases}$$

Dar, generatoarele (G) trebuie să se sprijine pe curba directoare Γ.

Pentru aceasta, sistemul format de ecuaţiile lor

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ \dfrac{z}{xy} = C_2 \\ x = 2y, \\ z = 1 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Fiind un sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute x, y şi z, el va fi compatibil numai dacă constantele C_1, C_2 satisfac relaţia de condiţie

$$2C_1C_2 = 3.$$

Înlocuind pe C_1 şi C_2 din integralele prime găsim că suprafaţa de câmp are ecuaţia carteziană explicită

$$z = \frac{3xy}{2(x^2 - y^2)}.$$

2. O integrală primă se vede imediat şi anume

$$\frac{x}{y} = C_1$$

şi se obţine integrând primele două rapoarte egale. Înmulţind primele două rapoarte cu x, respectiv y şi adunându–le, obţinem un nou raport egal cu primele trei. Un al cincilea raport egal cu primele patru se obţine adunând al treilea raport cu al patrulea. Combinaţia obţinută prin egalarea ultimelor două rapoarte

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2) + dz}{z+1}$$

este integrabilă şi, după efectuarea notaţiei $t = x^2 + y^2$, se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul întâi liniară şi neomogenă

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1-t}{2t}$$

a cărei soluţie generală este

$$z = C_2\sqrt{t} - 1 - t.$$

Revenind la notaţie, constatăm că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z + 1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2.$$

Suprafaţa de câmp se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = C_1 \\ \dfrac{z+1+x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = C_2 \\ x - z = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 - 1. \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil dacă şi numai dacă este satisfăcută relaţia de condiţie

$$C_1 = C_2\sqrt{1 + C_1^2}.$$

Înlocuind pe C_1 şi C_2 găsim că suprafaţa de câmp are ecuaţia

$$z = -x^2 - y^2 + x - 1.$$

3. O integrală primă este $\dfrac{y}{x} = C_1$. Înmulţim primul raport cu x, al doilea cu y, alcătuim din acestea un nou raport egal cu celelalte ce are la numărător suma numărătorilor celor două rapoarte modificate şi la numitor suma numitorilor aceloraşi rapoarte şi obţinem în acest fel combinaţia integrabilă

$$\frac{d(x^2+y^2)}{2z(x^2+y^2)} = \frac{dz}{x^2+y^2+z^2}.$$

Cu notaţia $t = x^2 + y^2$, combinaţia integrabilă se reduce la ecuaţia diferenţială Bernoulli

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1}{2}\frac{1}{z}.$$

Substituţia $z^2 = u$ reduce această ecuaţie la ecuaţia diferenţială liniară

$$u' - \frac{1}{t}u = 1,$$

care are soluţia generală $u = t\,C_2 + t\,\ln t$.

Revenind la vechile variabile, găsim că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z^2 - (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = C_2.$$

Pentru a determina suprafaţa de câmp trebuie să găsim suprafaţa generată de curbele integrale ale sistemului simetric al liniilor de câmp care trebuie să se sprijine pe curba Γ. Se procedează ca la celelalte exerciţii, se găseşte relaţia de condiţie

$$\frac{\dfrac{1}{C_1^4} - \Big(1 + \dfrac{1}{C_1^2}\Big)\ln\Big(1 + \dfrac{1}{C_1^2}\Big)}{1 + \dfrac{1}{C_1^2}} = C_2,$$

de unde, eliminând constantele arbitrare cu ajutorul integralelor prime, deducem că suprafaţa de câmp are ecuaţia

$$z^2 = \frac{y^4}{x^2} + 2(x^2+y^2)\ln x.$$

4. Integralele prime ale sistemului simetric al liniilor de câmp sunt

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{z}{y} - \frac{x}{y}\cos y = C_2$$

şi ansamblul acestora reprezintă ecuaţiile liniilor de câmp.

Relaţia de condiţie este $C_1^2\cos C_1 + C_2 = 0$, de unde deducem că suprafaţa de câmp care trece prin curba Γ are ecuaţia carteziană explicită

$$z = \frac{x^2}{y}\Big(\cos y - \cos\frac{x}{y}\Big).$$

■

3.4 Integrale cu vectori şi câmpuri scalare

Sub această denumire se înţeleg diverse tipuri de integrale (definite sau Riemann, curbilinii, de suprafaţă, duble şi triple) al căror integrand conţin câmpuri vectoriale sau câmpuri scalare. Vom considera câmpuri vectoriale de forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ sau de forma $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu şi câmpuri scalare de forma $\varphi \in \mathcal{F}(D)$, toate satisfăcând condiţiile cerute astfel încât integralele menţionate mai sus să aibă sens. Vom prezenta pe scurt aceste tipuri de integrale.

3.4.1 Integrale curbilinii

Fie AB o curbă în domeniul D care satisface *condiţiile de regularitate* până la ordinul care va fi necesar. O curbă care satisface condiţiile de regularitate se numeşte *curbă netedă*. Condiţiile de regularitate asigură existenţa tangentei în orice punct al ei, care variază continuu odată cu punctul curbei. Dacă A coincide cu B, curba corespunzătoare se numeşte *închisă*. Curba se zice *orientată* dacă s–a precizat un *sens de parcurs* pe ea.

Integrala curbilinie pe curba AB a câmpului vectorial $\mathbf{v}(P)$ sau a câmpului scalar $\varphi(P)$ este una din următoarele:

$$\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \mathbf{v}\times d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \varphi\, d\mathbf{r}, \tag{3.48}$$

unde $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ este diferenţiala vectorului de poziţie $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

Având în vedere expresiile analitice ale produselor de vectori, integralele curbilinii menţionate în (3.48) se exprimă după cum urmează:

$$\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} v_1dx + v_2dy + v_3dz; \tag{3.49}$$

$$\int_{AB} \mathbf{v}\times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_{AB} v_2\,dz - v_3\,dy + \mathbf{j}\int_{AB} v_3\,dx - v_1\,dz + \mathbf{k}\int_{AB} v_1\,dy - v_2\,dx;$$

$$\int_{AB} \varphi(x,y,z)d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_{AB} \varphi(x,y,z)dx + \mathbf{j}\int_{AB} \varphi(x,y,z)dy + \mathbf{k}\int_{AB} \varphi(x,y,z)dz.$$

Integralele curbilinii care apar în membrul al doilea în oricare din relaţiile de mai sus au forma generală

$$I = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

La studiul integralelor curbilinii de speţa a doua s–a specificat faptul că dacă $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R}^3)$ reprezintă un câmp de forţe pe D, integrala curbilinie (3.49) este *lucrul mecanic* al forţei $\mathbf{v}(P)$ când P parcurge curba AB.

Integrala curbilinie (3.49) se mai numeşte *integrală de linie* a vectorului $\mathbf{v}(P)$. Integrala de linie pe curba închisă (C), parcursă o singură dată, se numeşte *circulaţia* vectorului $\mathbf{v}(P)$ pe curba (C).

Integralele de linie au următoarele proprietăţi:

$$\int_{AB} (\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w})\cdot d\mathbf{r} = \lambda\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} + \mu\int_{AB} \mathbf{w}\cdot d\mathbf{r};$$

$$\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_{AP} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} + \int_{PB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r},\;\; P\in(AB),\;\; AP\cup PB = AB;$$

$$\Big|\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}\Big| \le \int_{AB} |\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}| \le \int_{AB} \|\mathbf{v}\|\,ds \le M\int_{AB} ds = M\cdot L;$$

$$\int_{AB} \mathbf{v}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r} = \Big(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big)(x_0,y_0,z_0)\cdot L, \tag{3.50}$$

unde: λ şi μ sunt scalari arbitrari; L este lungimea arcului AB; M este valoarea maximă a normei vectorului $\mathbf{v}(P)$ pe arcul (AB); $Q(x_0,y_0,z_0)$ este un punct determinat pe arcul de curbă (AB).

Proprietatea (3.50) este o teoremă de medie analoagă primei teoreme de medie de la integrala definită.

Celelalte tipuri de integrale curbilinii din (3.48) au proprietăţi similare.

Fie câmpul vectorial continuu $\mathbf{v} \in C(D,\mathbb{R}^3)$.

Definiţia 3.4.1. *Integrala curbilinie* $I = \int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ *se numeşte* **independentă de drum** *pe domeniul* $D \subset \mathbb{R}^3$ *dacă oricare ar fi punctele* $M_1, M_2 \in D$ *şi oricare ar fi arcele de curbă* $(M_1\alpha M_2)$ *şi* $(M_1\beta M_2)$*, ambele incluse în* D *şi cu sensurile de parcurs de la* M_1 *către* M_2*, avem*

$$\int_{M_1\alpha M_2} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1\beta M_2} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}.$$

Teorema 3.4.1. *Integrala curbilinie* $I = \displaystyle\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ *este independentă de drum pe* D *dacă şi numai dacă* $I = 0$ *oricare ar fi curba închisă netedă sau netedă pe porţiuni* $(C) \subset D$.

Demonstraţie. Dacă $M_1, M_2 \in D$ sunt puncte arbitrare şi $(M_1\alpha M_2) \subset D$, $(M_1\beta M_2) \subset D$ sunt arce arbitrare, netede pe porţiuni, atunci curba $(M_1\alpha M_2\beta M_1)$ este închisă şi netedă pe porţiuni şi, reciproc, fiind dată o curbă orientată închisă, netedă pe porţiuni, $(C) \subset D$ şi $M_1, M_2 \in (C)$ două puncte alese arbitrar, curba C se prezintă ca o juxtapunere de două arce netede pe porţiuni. Din aceste afirmaţii şi Definiţia 3.4.1 rezultă concluzia teoremei. **q.e.d.**

3.4.2 Integrale de suprafaţă

Domeniul pe care se efectuează integrarea este o porţiune de suprafaţă (Σ) de ecuaţie vectorială

$$(\Sigma): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in (\Delta \cup \gamma) \subset \mathbb{R}^2, \tag{3.51}$$

unde Δ este un domeniu plan iar frontiera acestuia γ este o curbă netedă închisă. Fie (C) frontiera suprafeţei (Σ). Această curbă este corespunzătoare prin transformarea (3.51) a curbei închise γ.

Presupunem că suprafaţa (Σ) este *netedă*, ceea ce înseamnă că admite *plan tangent* în fiecare punct al ei, care variază continuu odată cu punctul suprafeţei. Prin urmare, există şi sunt continue pe Δ derivatele parţiale

$$\mathbf{r}_u(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v), \quad \mathbf{r}_v(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v), \quad (u,v) \in \Delta,$$

care satisfac condiţia de regularitate $\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$.

În aceste condiţii, funcţia

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)}{\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$$

este *versorul normalei* în punctul $M \in (\Sigma)$ corespunzător punctului $(u,v) \in \Delta$, iar n_1, n_2, n_3 sunt *cosinusurile directoare* ale acestui versor.

După acelaşi criteriu ca şi la integrale curbilinii, introducem următoarele integrale de suprafaţă de speţa întâi:

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma; \qquad \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\times\mathbf{w})d\sigma; \qquad \iint_{(\Sigma)} \varphi\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{3.52}$$

unde $d\sigma$ este elementul de arie al suprafeţei (Σ).

În cazul când suprafaţa este dată prin ecuaţia vectorială (3.51), expresia elementului de arie $d\sigma$ este

$$d\sigma = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\,dudv,$$

unde $E(u,v), F(u,v)$ şi $G(u,v)$ sunt coeficienţii lui Gauss[2]:

$$E(u,v) = \mathbf{r}_u^2(u,v); \quad F(u,v) = \mathbf{r}_u(u,v)\cdot\mathbf{r}_v(u,v); \quad F(u,v) = \mathbf{r}_v^2(u,v).$$

Integralele de suprafaţă cu vectori din (3.52) se calculează după cum urmează:

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma = \iint_{\Delta} (n_1w_1 + n_2w_2 + n_3w_3)\sqrt{EG - F^2}\,dudv;$$

[2]Gauss, Johann Carl Friederich (1777 – 1855), om de ştiinţă şi matematician german cu contribuţii semnificative în domeniile: teoria numerelor; statistică matematică; analiză matematică; geometrie diferenţială; geodezie; geofizică; electrostatică; astronomie; şi optică.

$$\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\times\mathbf{w})d\sigma = \mathbf{i}\iint\limits_{(\Sigma)} (n_2w_3 - n_3w_2)d\sigma + \mathbf{j}\iint\limits_{(\Sigma)} (n_3w_1 - n_1w_3)d\sigma + \mathbf{k}\iint\limits_{(\Sigma)} (n_1w_2 - n_2w_3)d\sigma; \tag{3.53}$$

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \varphi\mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{i}\iint\limits_{(\Sigma)} n_1\varphi\, d\sigma + \mathbf{j}\iint\limits_{(\Sigma)} n_2\varphi\, d\sigma + \mathbf{k}\iint\limits_{(\Sigma)} n_3\varphi\, d\sigma. \tag{3.54}$$

Integralele din membrul doi al egalităţilor (3.53) şi (3.54) se reduc la integrale duble pe Δ conform formulei de calcul a unei integrale de suprafaţă de speţa întâi [13].

Definiţia 3.4.2. *O expresie de forma* $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma$ *se numeşte* **flux elementar** *al câmpului vectorial* $\mathbf{w}$ *prin elementul orientat de suprafaţă* $\mathbf{n}d\sigma$*, iar integrala de suprafaţă de speţa întâi* $\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})\, d\sigma$ *se numeşte* **fluxul total** *al câmpului* $\mathbf{w}$ *prin suprafaţa* (Σ).

Proprietăţile integralelor de suprafaţă (3.52) sunt analoage celor prezentate pentru integrale curbilinii. Prin urmare, avem

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n}\cdot(\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w})\, d\sigma = \lambda\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})d\sigma + \mu\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma; \tag{3.55}$$

$$\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma = \iint\limits_{(\Sigma_1)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma + \iint\limits_{(\Sigma_2)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma, ; \tag{3.56}$$

$$\Big|\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma\Big| \le \iint\limits_{(\Sigma)} |(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})|d\sigma \le \iint\limits_{(\Sigma)} \|\mathbf{w}\|\, d\sigma \le M\iint\limits_{(\Sigma)} d\sigma = M\, A_\Sigma; \tag{3.57}$$

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\, d\sigma = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})(x_0,y_0,z_0)\, A_\Sigma, \tag{3.58}$$

unde: λ şi μ sunt scalari arbitrari; Σ_1 şi Σ_2 sunt submulţimi ale suprafeţei Σ pentru care $\Sigma_1\cup\Sigma_2 = \Sigma$, $\Sigma_1\cap\Sigma_2 = \emptyset$; A_Σ este aria suprafeţei (Σ); M este valoarea maximă a normei vectorului $\mathbf{w}(P)$ pe suprafaţa (Σ); $Q(x_0,y_0,z_0)$ este un punct determinat al suprafeţei Σ.

Proprietatea (3.58) este o teoremă de medie analoagă primei teoreme de medie din teoria integralelor definite.

Celelalte integrale de suprafaţă din (3.52) au proprietăţi asemănătoare celor prezentate în (3.55) – (3.57).

Este posibil ca suprafaţa netedă (Σ) să fie reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia

$$(\Sigma):\quad z = f(x,y),\quad (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2, \tag{3.59}$$

caz în care, elementul de arie $d\sigma$ al suprafeţei are forma

$$d\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\, dxdy,$$

unde

$$p = p(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\quad q = q(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y),$$

iar versorul normalei $\mathbf{n}$ la faţa superioară a suprafeţei are expresia analitică

$$\mathbf{n} = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{i} - \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{k}. \tag{3.60}$$

În cazul menţionat de (3.59) şi (3.60), reducerea unei integrale de suprafaţă $\iint\limits_{(\Sigma)} \varphi(x,y,z)\,d\sigma$ la o integrală dublă se face cu ajutorul formulei de calcul

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \varphi(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} \varphi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy. \tag{3.61}$$

Folosind (3.59) − (3.61) se pot transpune cu uşurinţă toate rezultatele stabilite în cazul când suprafaţa (Σ) este dată prin ecuaţia vectorială (3.51). Pentru aceasta trebuie efectuată schimbarea de variabile $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ în integrala dublă (3.61).

Afirmaţii asemănătoare au loc şi atunci când suprafaţa (Σ) este dată implicit printr–o ecuaţie de forma $F(x,y,z) = 0$. Astfel,

$$p = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

iar versorul normalei la suprafaţa (Σ) în punctul $P(x,y,z) \in (\Sigma)$ este

$$\mathbf{n}(P) = \frac{(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)}{\|(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)\|}.$$

3.4.3 Integrale triple (de volum)

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu carabil, deci o mulţime care are volum. Elementul de volum, notat cu $d\omega$, are expresia $d\omega = dxdydz$.

Integralele de volum sau triple care ne vor interesa sunt:

$$\iiint\limits_{\Omega} \varphi\,d\omega; \quad \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}\,d\omega. \tag{3.62}$$

Prima din integralele (3.62) a fost studiată arătându–se că, în anumite ipoteze asupra domeniului Ω, ea se reduce la o iteraţie de integrale simple. De exemplu, dacă Ω este un *domeniu simplu* în raport cu axa Oz iar proiecţia sa pe planul xOy este un domeniu simplu în raport cu axa Oy, atunci

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x), z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}.$$

Astfel,

$$\iiint\limits_{\Omega} \varphi\,d\omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \varphi(x,y,z)\,dz.$$

A doua integrală (3.62) se reduce la calculul a trei integrale de tipul celei precedente,

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}\,d\omega = \mathbf{i} \iiint\limits_{\Omega} v_1\,d\omega + \mathbf{j} \iiint\limits_{\Omega} v_2\,d\omega + \mathbf{k} \iiint\limits_{\Omega} v_3\,d\omega,$$

fiecăreia din integralele membrului drept urmând să i se aplice o formulă de calcul.

Prezentăm, fără demonstraţie, unele proprietăţi ale integralelor triple:

$$\iiint\limits_{\Omega} (\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w})d\omega = \lambda \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}d\omega + \mu \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{w}d\omega;$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v} d\omega = \iiint\limits_{\Omega_1} \mathbf{v} d\omega + \iiint\limits_{\Omega_2} \mathbf{v} d\omega;$$

$$\Big| \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}(P)\, d\omega \Big| \le \iiint\limits_{\Omega} \|\mathbf{v}(P)\| d\omega \le M \iiint\limits_{\Omega} d\omega = M\, \mathrm{Vol}(\Omega),$$

unde $\Omega_1,\ \Omega_2$ sunt astfel încât $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega,\ \mathrm{Int}\,\Omega_1 \cap \mathrm{Int}\,\Omega_2 = \emptyset,\ M = \max\limits_{P\in\Omega} \|\mathbf{v}(P)\|$ şi $\mathrm{Vol}(\Omega)$ este volumul domeniului Ω.

3.4.4 Formula integrală Gauss–Ostrogradski. Consecinţe

Să considerăm domeniul tridimensional V a cărui frontieră este suprafaţa închisă netedă S şi fie (x_1, x_2, x_3) coordonatele carteziene ale unui punct oarecare $P \in V \cup S$. Suprafaţa S fiind netedă, în fiecare punct $P \in S$ există versorul $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ al normalei exterioare. Astfel, avem un câmp vectorial definit în punctele P ale suprafeţei care depinde de variabila vectorială $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$.

Considerăm $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(V \cup S, \mathbb{R}^3)$ un câmp vectorial continuu pentru care coordonata v_i are derivata parţială $v_{i,i}$ continuă în V.

În aceste ipoteze are loc *formula integrală Gauss–Ostrogradski* [3]

$$\iint\limits_{S} (n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3) d\sigma = \iiint\limits_{V} (v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}) d\omega, \tag{3.63}$$

care se poate scrie şi în forma

$$\iint\limits_{S} \sum_{i=1}^{3} n_i v_i \, d\sigma = \iiint\limits_{V} \sum_{i=1}^{3} v_{i,i}\, d\omega. \tag{3.64}$$

În particular, considerând pe rând: $v_1 = 1,\ v_2 = 0,\ v_3 = 0;\ v_1 = 0,\ v_2 = 1,\ v_3 = 0;\ v_1 = 0,\ v_2 = 0,\ v_3 = 1,$ formula (3.63) devine:

$$\iint\limits_{S} n_1\, d\sigma = 0; \quad \iint\limits_{S} n_2\, d\sigma = 0; \quad \iint\limits_{S} n_3\, d\sigma = 0. \tag{3.65}$$

Relaţiile (3.65) pot fi scrise unitar în forma

$$\iint\limits_{S} \mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{0}.$$

Dacă alegem succesiv pentru câmpul vectorial $\mathbf{v}$ una din următoarele expresii analitice:

$$(x_1, 0, 0); \quad (0, x_1, 0); \quad (0, 0, x_1);$$

$$(x_2, 0, 0); \quad (0, x_2, 0); \quad (0, 0, x_2);$$

$$(x_3, 0, 0); \quad (0, x_3, 0); \quad (0, 0, x_3),$$

[3] Ostrogradski, Mihail Vasilevici (1801 – 1862), matematician şi fizician rus, născut în Ucraina. A fost discipol al lui Leonhard Euler. Este considerat unul din cei mai importanţi matematicieni ai Rusiei Ţariste.

din (3.64) obţinem

$$\iint\limits_S n_1x_1d\sigma = \text{vol}(V); \quad \iint\limits_S n_2x_1d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_3x_1d\sigma = 0;$$

$$\iint\limits_S n_1x_2d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_2x_2d\sigma = \text{vol}(V); \quad \iint\limits_S n_3x_2d\sigma = 0;$$

$$\iint\limits_S n_1x_3d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_2x_3d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_3x_3d\sigma = \text{vol}(V).$$

Aceste relaţii pot fi scrise concentrat în forma

$$\iint\limits_S n_ix_j\, d\sigma = \delta_{ij}\,\text{vol}(V), \tag{3.66}$$

unde indicii i şi j iau oricare din valorile $1, 2, 3$, δ_{ij} este simbolul Kronecker[4] ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, dacă $i \neq j$), iar $\text{vol}(V)$ este volumul domeniului V.

Din (3.66) se pot deduce relaţiile

$$\iint\limits_S x_1\mathbf{n}d\sigma = \text{vol}(V)\mathbf{i}; \quad \iint\limits_S x_2\mathbf{n}d\sigma = \text{vol}(V)\mathbf{j}; \quad \iint\limits_S x_3\mathbf{n}d\sigma = \text{vol}(V)\mathbf{k}. \tag{3.67}$$

3.4.5 Câmp potenţial

Definiţia 3.4.3. *Un câmp vectorial continuu* $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ *se numeşte* **câmp potenţial** *dacă există câmpul scalar* $\varphi \in C^1(D)$, *numit* **potenţialul scalar** *al câmpului vectorial* $\mathbf{v}$, *astfel încât*

$$\mathbf{v}(M) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M), \quad (\forall)\ M \in D.$$

Definiţia 3.4.4. *Un câmp de forţe* $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ *se numeşte* **câmp conservativ de forţe** *dacă există câmpul scalar* $U \in C^1(D)$, *numită* **funcţie de forţă**, *astfel încât* $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}U$.

Exemplul 3.4.1. ***Câmpul gravitaţional*** *este un câmp conservativ de forţe.*

Soluţie. Într-adevăr, să presupunem că originea reperului $Oxyz$ este în centrul pământului. Se ştie că forţa $\mathbf{F}$ cu care este atras de către pământ un punct material $M(\mathbf{r})$ este

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{C}{r^3}\,\mathbf{r},$$

unde C este o constantă, iar r este mărimea vectorului de poziţie $\mathbf{r}$ a punctului M. Deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{z}{r^3},$$

[4] Kronecker, Leopold (1823 - 1891), matematician german, printre contribuţiile importante ale sale numărându–se lema lui Kronecker, produsul lui Kronecker, delta lui Kronecker şi teorema lui Kronecker.

rezultă că putem reprezenta câmpul gravitaţional $\mathbf{F}$ în forma

$$\mathbf{F}(M) = (\boldsymbol{\nabla} U)(M),$$

unde $U(M) = C/r$.

Prin urmare, câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este un câmp conservativ de forţe pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. ■

Teorema 3.4.2. *Fie câmpul vectorial* $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$, *unde* D *este un domeniu tridimensional.*

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- $\mathbf{v}$ *este un câmp potenţial;*
- *integrala curbilinie* $\displaystyle\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ *este independentă de drum pe* D*;*
- *expresia diferenţială* $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ *este o diferenţială totală pe* D*.*

Demonstraţie. Faptul că prima afirmaţie implică celelalte două este evident.

Să presupunem că $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este diferenţială totală pe D. Atunci există funcţia U diferenţiabilă pe D astfel încât $\omega = dU = (\boldsymbol{\nabla} U) \cdot (d\mathbf{r})$ din care deducem că

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} dU = U(B) - U(A)$$

şi deci integrala curbilinie depinde doar de extremităţile A şi B ale curbei (C). Din $\omega = (\boldsymbol{\nabla} U) \cdot (d\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ şi unicitatea expresiei diferenţialei unei funcţii obţinem $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} U$, ceea ce arată că $\mathbf{v}$ este un câmp potenţial. Aşadar, prima afirmaţie este implicată de ultima.

Dacă integrala curbilinie $\displaystyle\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D, considerând arcul de curbă $AM \subset D$ cu extremitatea A fixă şi cealaltă extremitete M variabilă, funcţia $U(M) = \displaystyle\int_{AM} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ are proprietatea $\boldsymbol{\nabla} U = \mathbf{v}$, adică $\mathbf{v}$ este un câmp potenţial. **q.e.d.**

3.5 Divergenţa unui câmp vectorial

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu având ca frontieră suprafaţa închisă netedă sau netedă pe porţiuni Σ şi $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega \cup \Sigma, \mathbb{R}^3)$ un câmp vectorial continuu pe $\Omega \cup \Sigma$, diferenţiabil în orice punct $M(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

Considerând un punct $P_0 \in \Omega$, de vector de poziţie $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$, există domenii $V \subset \Omega$ astfel încât $P_0 \in V$. Presupunem că frontiera unui astfel de domeniu V este o suprafaţă închisă netedă S. Fie $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ versorul normalei exterioare într–un punct oarecare $P \in S$ de vector de poziţie $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Fie $\delta(V)$ *diametrul* mulţimii V, adică maximul distanţei dintre două puncte oarecare $M, Q \in V$. Presupunem că domeniul V are volum şi că $\mathrm{vol}\,(V)$ este volumul său.

Cu aceste pregătiri, considerăm raportul

$$\frac{\Phi}{\mathrm{vol}\,(V)} = \frac{\displaystyle\iint_S \Big(\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\Big) d\sigma}{\mathrm{vol}\,(V)}, \tag{3.68}$$

dintre fluxul Φ al câmpului vectorial $\mathbf{v}$ prin suprafaţa S şi $\mathrm{vol}(V)$.

Definiţia 3.5.1. *Se numeşte* **divergenţa** *câmpului vectorial* $\mathbf{v}$, *în punctul* P_0, *notată* $(\mathit{div}\,\mathbf{v})(P_0)$ *sau* $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x_0})$, *limita raportului* (3.68) *atunci când diametrul domeniului* V *tinde la zero, adică*

$$\lim_{\delta(V)\to 0} \frac{\displaystyle\iint_S (\mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x}))d\sigma}{\text{vol}\,(V)} = (\text{div}\,\mathbf{v})(P_0) = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{x}_0). \tag{3.69}$$

Teorema 3.5.1. *Dacă* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ *este câmp vectorial diferenţiabil în* $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP}_0$ *şi există constantele pozitive* k_1 *şi* k_2 *astfel încât:*

$$\mathit{aria}\,(S) \leq k_1\,\delta^2(V); \quad \mathit{vol}\,(V) \geq k_2\,\delta^3(V), \tag{3.70}$$

atunci limita (3.69) *există şi*

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}_0). \tag{3.71}$$

Demonstraţie. Din ipoteza diferenţiabilităţii funcţiei vectoriale $\mathbf{v}$ de argument vectorial în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$ rezultă că are loc identitatea

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|, \tag{3.72}$$

unde $d\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = (d\mathbf{v})(\mathbf{x})(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = (\mathbf{i}\;\mathbf{j}\;\mathbf{k})\Big(J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)\Big(X-X_0\Big)\Big)$ este valoarea în $\mathbf{h} = \mathbf{x}-\mathbf{x}_0 = (\mathbf{i}\;\mathbf{j}\;\mathbf{k})\Big(X-X_0\Big)$ a diferenţialei funcţiei $\mathbf{v}$ în punctul $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{i}\;\mathbf{j}\;\mathbf{k})X_0$, $J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \Big\|\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\Big\|_{3\times 3}$ este matricea jacobiană a funcţiei $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ în punctul $\mathbf{x}_0$, iar $\boldsymbol{\alpha}$ este o funcţie vectorială definită pe $\mathbb{R}^3$ cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{3.73}$$

În aceste relaţii, $X - X_0$ şi X_0 reprezintă matricea cu trei linii şi o coloană a coordonatelor vectorilor $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ şi respectiv $\mathbf{x}_0$ în baza formată de versorii ortogonali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ care, împreună cu originea O, constituie reperul cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$.

Dacă înmulţim ambii membri ai relaţiei (3.72) cu $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, integrăm pe suprafaţa S, ţinem cont de relaţiile (3.66) şi (3.67) şi împărţim cu $\text{vol}\,(V)$, se obţine

$$\frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\sigma}{\text{vol}\,(V)} = \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0) + \frac{\displaystyle\iint_S \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|(\mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\,d\sigma}{\text{vol}\,(V)}. \tag{3.74}$$

Trecem în membrul întâi primul termen al membrului doi din (3.74) şi apoi luăm valoarea absolută. A doua ipoteză (3.70), faptul că $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| \leq \delta(V)$ şi inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$|\mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|\,\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|,$$

conduc la

$$\left|\frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\sigma}{\text{vol}\,(V)} - \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0)\right| \leq \frac{\displaystyle\iint_S \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|\,d\sigma}{k_2\delta^2(V)}. \tag{3.75}$$

Însă, din (3.73) rezultă că funcţia $\boldsymbol{\alpha}$ este continuă în $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ceea ce atrage că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\mu(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \frac{k_2}{k_1}\varepsilon, \tag{3.76}$$

oricare ar fi $\mathbf{x} \in S$ care satisface inegalitatea

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \mu(\varepsilon).$$

Putem considera că domeniul $V \subset \Omega$ ce conţine punctul $\mathbf{x}_0$ este astfel ales încât $\delta(V) \leq \mu(\varepsilon)$. În acest caz, din (3.70), (3.75), (3.76) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\mu(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi domeniul V cu $\delta(V) < \mu$ avem

$$\left| \frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\sigma}{\mathrm{vol}\,(V)} - \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0) \right| < \varepsilon,$$

ceea ce conduce la relaţia

$$\lim_{\delta(V)\to 0} \frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma}{\mathrm{vol}(V)} = \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0). \tag{3.77}$$

Din (3.69) şi (3.77) rezultă (3.71). **q.e.d.**

Demonstraţia acestei teoreme nu ar fi fost posibilă fără inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz [8]. [5] [6]

Deoarece divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ într–un punct oarecare $M \in \Omega$ este

$$(\mathrm{div}\,\mathbf{v})(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z), \tag{3.78}$$

analizând (3.78), constatăm că în membrul al doilea este rezultatul înmulţirii scalare a operatorului diferenţial al lui Hamilton

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

cu vectorul $\mathbf{v}$ şi deci notaţia $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}$ pentru divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{v}$ este justificată.

Definiţia 3.5.2. *Un câmp vectorial* $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$, *diferenţiabil în domeniul* D, *se numeşte* **solenoidal** *dacă* $div\,\mathbf{v} = 0$.

3.6 Rotorul unui câmp vectorial

Să considerăm o direcţie arbitrară de versor $\mathbf{a}$ şi fie (Π) planul perpendicular pe versorul $\mathbf{a}$ care trece printr-un punct fixat $P_0 \in \Omega$ În acest plan considerăm o curbă simplă închisă (C) care înconjoară punctul P_0. Curba (C) delimitează o porţiune (S) de suprafaţă plană, a cărei arie o notăm tot cu S. Fie $\delta(S)$ diametrul mulţimii (S).

[5]Schwarz, Karl Herman Amandus (1843 – 1921), matematician german.

[6]Buniakowski, Viktor Iakovlevici (1804 - 1889), matematician rus, membru şi apoi vicepreşedinte al Academiei de Ştiinţe din Sankt Petersburg. În 1826 Buniakowski obţine o bursă la Paris avându-l ca profesor pe Cauchy. Buniakovski a publicat peste 150 lucrari din diverse domenii ale matematicii (în special teoria numerelor, teoria probabilităţilor), precum şi mecanică. În 1846 publică un tratat de teoria probabilităţilor, în care sunt prezentate realizările în domeniu ale lui Siméon Denis Poisson şi Pierre–Simon Laplace. În 1875 s–a instituit "Premiul Buniakovski" pentru matematicieni. În alte lucrări ulterioare se ocupă de statistica demografică, de determinarea erorilor de observaţie şi alte probleme similare. În ceea ce priveşte teoria numerelor, dă o noua demonstraţie legii reciprocităţii pătratice. Dar cel mai celebru rezultat al său este cel din analiză matematică: inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Inegalitatea a fost publicată de Cauchy în 1821. În 1859 Buniakovski a reformulat-o pentru calculul integral. A tradus în limba rusă şi a redactat multe din lucrările lui Cauchy.

Pentru a introduce rotorul unui câmp vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, plecăm de la circulaţia Γ a acestuia pe curba (C) şi să calculăm limita

$$\lim_{\delta(S)\to 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{\delta(S)\to 0} \frac{\displaystyle\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}}{S}.$$

În acest scop, transformăm raportul Γ/S într–un raport dintre un flux pe o suprafaţă închisă $(\mathcal{S})$ şi volumul domeniului V închis de această suprafaţă, reducând astfel problema la cea prezentată în paragraful precedent. Pentru aceasta, considerăm porţiunea din suprafaţa cilindrică, cu generatoarele paralele cu $\mathbf{a}$, de înălţime constantă h şi având una din baze porţiunea de suprafaţă (S).

Notăm cu (S_1) cealaltă bază a cilindrului, cu (S_ℓ) suprafaţa laterală a sa, iar cu $d\sigma_\ell$ elementul de arie al suprafeţei (S_ℓ).

Având în vedere că $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}\, ds$ şi că $h \cdot ds = d\sigma_\ell$, rezultă că

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{h \cdot \displaystyle\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}}{h \cdot S} = \frac{\displaystyle\iint_{S_\ell} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\sigma_\ell}{\mathrm{vol}\,(V)}, \tag{3.79}$$

unde $\boldsymbol{\tau}$ este versorul tangentei la curba (C) orientat astfel încât să fie compatibil cu orientarea suprafeţei (S). Însă $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{n}_\ell$ (normala exterioară la suprafaţa laterală a cilindrului) formează un triedru drept astfel că $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}_\ell$. Atunci, (3.79) devine

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\displaystyle\iint_{S_\ell} (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}_\ell\, d\sigma_\ell}{\mathrm{vol}\,(V)}. \tag{3.80}$$

Deoarece integralele pe bazele cilindrului din integrantul care intră în (3.80) sunt nule, în baza celor deduse în paragraful prercedent, rezultă că

$$\lim_{\delta(S)\to 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{\delta(V)\to 0} \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma}{\mathrm{vol}\,(V)} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}))(\mathbf{x}_0). \tag{3.81}$$

Dacă aplicăm formula de calcul a divergenţei, găsim că limita din (3.81) se poate scrie ca produsul scalar dintre vectorul $\mathbf{a}$ şi un anumit vector $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$

$$\lim_{\delta(S)\to 0} \frac{\Gamma}{S} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_0),$$

unde

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (v_{3,2}(\mathbf{x}_0) - v_{2,3}(\mathbf{x}_0))\mathbf{i} + (v_{1,3}(\mathbf{x}_0) - v_{3,1}(\mathbf{x}_0))\mathbf{j} + (v_{2,1}(\mathbf{x}_0) - v_{1,2}(\mathbf{x}_0))\mathbf{k}.$$

Definiţia 3.6.1. *Vectorul* $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$ *se numeşte* **rotorul** *câmpului vectorial* $\mathbf{v}$ *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *şi se scrie:*

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Dacă analizăm expresia rotorului vedem că aceasta se poate calcula cu ajutorul determinantului formal

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} (\mathbf{x}_0) = (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Într–un punct oarecare $\mathbf{x}$, vom avea

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})(\mathbf{x})=(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})(\mathbf{x})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ v_1(\mathbf{x}) & v_2(\mathbf{x}) & v_3(\mathbf{x})\end{vmatrix}.$$

Definiţia 3.6.2. *Un câmp vectorial* $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R}^3)$, *diferenţiabil în domeniul* D, *se numeşte* **irotaţional** *sau* **lamelar** *dacă* $\mathit{rot}\,\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Teorema 3.6.1. *Un câmp potenţial* $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(D,\mathbb{R}^3)$, *al cărui potenţial* $\varphi\in C^2(D)$, *este lamelar.*

Demonstraţie. Într-adevăr, câmpul vectorial $\mathbf{v}$ fiind potenţial, $\mathbf{v}(M)=\mathrm{grad}\,\varphi(M)$. Calculând rotorul acestui câmp, găsim

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}=\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_2}\Big)\mathbf{i}+\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_1}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3}\Big)\mathbf{j}+\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}\Big)\mathbf{k}.$$

Din faptul că $\varphi\in C^2(D)$, rezultă că derivatele parţiale mixte de ordinul doi ale sale sunt egale. Prin urmare, $\mathbf{v}$ este câmp irotaţional sau lamelar, adică $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$. **q.e.d.**

3.7 Reguli de calcul cu operatorul lui Hamilton

O parte a acestor reguli au fost menţionate în (3.29), unde operatorul $\boldsymbol{\nabla}$ s–a aplicat unor funcţii scalare. Mai mult, gradientul poate fi aplicat unui produs scalar a două câmpuri vectoriale. Operatorul $\boldsymbol{\nabla}$ aplicat scalar unui câmp vectorial conduce la divergenţa acelui câmp, iar dacă $\boldsymbol{\nabla}$ se aplică vectorial unui câmp vectorial se obţine rotorul acelui câmp, adică

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi=\mathrm{grad}\,\varphi;\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}=\mathrm{div}\,\mathbf{u};\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}=\mathrm{rot}\,\mathbf{v}.$$

În baza celor prezentate mai sus, se pot demonstra următoarele *formule de calcul cu operatorul* $\boldsymbol{\nabla}$ a lui Hamilton în care, pentru simplitate, renunţam la scrierea variabilei vectoriale $\mathbf{x}$):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v};$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{u}+\mathbf{v})=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}+\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v};$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\,\mathbf{u})=\varphi(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})+\mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\varphi);$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})-\mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v});$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\,\mathbf{u})=\varphi(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})-\mathbf{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi);$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})=\mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u})+\mathbf{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})+(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v};$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})-\nabla^2\mathbf{v},$$

unde $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ este *operatorul diferenţial al lui Laplace*[7] sau *laplacian.*

Avem

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

se numeşte *ecuaţia lui Laplace.* Orice soluţie a ecuaţiei Laplace se numeşte *funcţie armonică* .

Pentru alte operaţii cu operatorul $\boldsymbol{\nabla}$, obţinem:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}; \tag{3.82}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0.$$

3.8 Formule integrale

Fie (Σ) o suprafaţă închisă ce mărgineşte domeniul Ω, care are următoarele proprietăţi:

- o dreaptă paralelă la axele de coordonate ale reperului cartezian ortogonal $Oxyz$ intersectează suprafaţa (Σ) în cel mult două puncte;
- Ω se proiectează pe planul xOy după un domeniu D şi cilindrul proiectant al lui Ω cu generatoarele paralele cu Oz este tangent la Ω în lungul unei curbe (Γ) care împarte (Σ) în două suprafeţe (condiţii analoage se pot pune şi pentru planele yOz şi zOx);
- suprafaţa (Σ) este cu două feţe şi presupunem că este formată dintr–un număr de porţiuni netede.

Pentru astfel de suprafeţe (Σ) şi domeniile Ω mărginite de ele au loc următoarele formule integrale:

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{v}\,d\omega; \tag{3.83}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{n}\varphi\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{grad}\varphi\,d\omega; \tag{3.84}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\omega; \tag{3.85}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi\,\frac{d\psi}{d\mathbf{n}}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi + \varphi\nabla^2\psi)d\omega; \tag{3.86}$$

[7] Laplace, Pierre – Simon (1749 – 1827), matematician şi astronom francez a cărui operă a fost pivotul dezvoltării astronomiei matematice şi statisticii matematice. A rezumat şi extins opera predecesorilor săi în cele cinci volume de *Mecanică cerească*, editate între anii 1799 şi 1825. Această operă translatează studiul geometric al mecanicii clasice spre unul fundamentat pe calculul diferenţial, deschizând astfel un domeniu larg de probleme. În statistică, aşa numita interpretare Bayesiana a probabilităţii a fost dezvoltată în principal de către Laplace. A formulat *ecuaţia lui Laplace* şi a pus bazele *transformatei Laplace* care apare în multe domenii ale fizicii matematice, un domeniu al matematicii unde şi–a adjudecat rolul de formator. *Operatorul diferenţial al lui Laplace* este denumit astfel după numele său. Laplace a reformulat şi dezvoltat ipoteza nebulară a originii sistemului solar şi a fost unul din primii oameni de stiinţă care a postulat existenţa găurilor negre. A introdus noţiunea de colaps gravitaţional. Laplace este considerat unul din cei mai mari oameni de ştiinţă din toate timpurile, fapt ce i–a atras supranumele de Newton al Franţei. A înţeles matematica mai bine decât oricare din contemporanii săi. A devenit conte al Primului Imperiu Francez în 1806 şi a fost numit marchiz în 1817 de către Restauraţia Bourbon.

$$\iint\limits_{\Sigma}\Big(\varphi\frac{d\psi}{d\mathbf{n}}-\psi\frac{d\varphi}{d\mathbf{n}}\Big)d\sigma=\iiint\limits_{\Omega}(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)d\omega. \tag{3.87}$$

Formula integrală (3.83) este forma vectorială a formulei Gauss–Ostrogradski (3.63), fiind adeseori întâlnită sub denumirea de *formula integrală a divergenţei* sau *teorema divergenţei.*

Identitatea (3.84) se numeşte *formula integrală a gradientului.*

Relaţiei (3.85) i se poate spune *formula integrală a rotorului.*

Egalitatea (3.86) este cunoscută sub denumirea de *prima identitate integrală a lui Green*[8].

Relaţia (3.87) este *a doua identitate integrală a lui Green.*

Observaţia 3.8.1. *Identităţile lui Green pot fi considerate atât în spaţiul afin $I\!E^n$, de dimensiune superioară lui 3, asociat spaţiului Euclidian $\mathbb{R}^n$, cât şi în planul afin $I\!E^2$ asociat spaţiului Euclidian bidimensional $\mathbb{R}^2$.*

Dacă (S) este o porţiune de suprafaţă regulată orientabilă, având frontiera o curbă închisă rectificabilă (Γ), iar câmpul vectorial $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ este diferenţiabil şi $S\subset\Omega$, atunci are loc *formula integrală a lui Stokes* [9]

$$\int_\Gamma \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_S \mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\sigma. \tag{3.88}$$

Teorema 3.8.1. *Câmpul vectorial $\mathbf{v}\in C^1(D,\mathbb{R}^3)$ este irotaţional pe domeniul simplu conex $D\subset\mathbb{R}^3$ dacă şi numai dacă integrala curbilinie $\displaystyle\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D.*

Demonstraţie. Presupunem $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ şi fie C o curbă închisă oarecare inclusă în D, iar $S\subset D$ o suprafaţă cu frontiera C. Aplicând formula integrală a lui Stokes (3.88), găsim $\displaystyle\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=0$. În baza Teoremei 3.4.1 rezultă că integrala curbilinie $\displaystyle\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D.

Demonstraţia reciprocei se face prin reducere la absurd. Presupunem că există un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ în care $\operatorname{rot}\mathbf{v}\neq 0$ şi fie că, în acest punct, $v_{2,1}-v_{1,2}=\mu>0$. Atunci există o vecinătate a punctului M_0, situată în planul $z=z_0$ şi inclusă în D, în punctele căreia avem $v_{2,1}-v_{1,2}>0$. Aplicând formula lui Stokes, în care porţiunea de suprafaţă este în vecinătatea de mai sus, găsim că pe frontiera acesteia, care este o curbă închisă din D, integrala curbilinie este diferită de zero. Dar acest lucru contrazice ipoteza. **q.e.d.**

Exerciţiul 3.8.1. *Se dă câmpul de forţă definit pe $\mathbb{R}^3$*

$$\mathbf{F}(x,y,z)=yz(2x+y+z)\mathbf{i}+zx(x+2y+z)\mathbf{j}+xy(x+y+2z)\mathbf{k}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este irotaţional şi să se determine o funcţie de forţă.

[8]Green, George (1793 - 1841), matematician englez, iniţiatorul fizicii matematice în Marea Britanie.

[9]Stokes, Sir George Gabriel (1819 – 1903), matematician şi fizician englez care, la Universitatea Cambridge din Marea Britanie, a adus contribuţii importante în: dinamica fluidelor, inclusiv ecuaţiile Navier – Stokes; optică; şi fizică matematică. A fost secretar şi apoi preşedinte al Societăţii Regale a Regatului Unit al Marii Britanii şi Irlanda.

Soluţie Faptul că $\mathbf{F}$ este câmp irotaţional de forţă este simplu de arătat.

În baza Teoremei 3.8.1, integrala curbilinie $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum în $\mathbb{R}^3$. Folosind Teorema 3.4.2, deducem că funcţia de forţă care se anulează în origine este $U(M) = \int_{OM} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Deoarece integrala curbilinie este independentă de drum, se poate integra de la O la $M(x,y,z)$ pe muchiile paralelipipedului cu feţele paralele cu axele de coordonate care are O şi M ca vârfuri opuse. Atunci

$$U(M) = \int_0^x v_1(t,0,0)dt + \int_0^y v_2(x,t,0)dt + \int_0^z v_3(x,y,t)dt.$$

Folosind coordonatele câmpului vectorial $\mathbf{v}$, rezultă că funcţia de forţă care se anulează în origine este $U(x,y,z) = \int_0^z xy(x+y+2t)dt = xyz(x+y+z)$. ■

Exerciţiul 3.8.2. *Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial*

$$\mathbf{w} = (-x+y+z)\mathbf{i} + (x-y+z)\mathbf{j} + (x+y-z)\mathbf{k}.$$

Arătaţi că $\mathbf{w}$ este câmp conservativ şi determinaţi–i funcţiile de forţă. Calculaţi fluxul câmpului $\mathbf{w}$ prin faţa exterioară a suprafeţei închise S de ecuaţie $|-x+y+z| + |x-y+z| + |x+y-z| = 1$.

Soluţie. Sistemul diferenţial al liniilor de câmp generează combinaţiile integrabile

$$\frac{dx+dy+dz}{x+y+z} = \frac{dy-dx}{-2(y-x)} = \frac{dx+dy-2dz}{-2(x+y-2z)}$$

şi liniile de câmp

$$\begin{cases} (x+y+z)^2(x+y-2z) = C_1 \\ x+y-2z = C_2(y-x). \end{cases}$$

Avem că $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{w} = \mathbf{0}$ ceea ce arată că $\mathbf{w}$ este un câmp conservativ.

Observând că expresia diferenţială $\omega = \mathbf{w}\cdot d\mathbf{r}$ este diferenţiala funcţiei $-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx$, deducem că funcţiile de forţă sunt $F(x,y,z) = -\dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)+xy+yz+zx+const.$

Suprafaţa prin care se calculează fluxul este închisă, are opt feţe şi limitează domeniul V. Folosind formula integrală Gauss–Ostrogradski, rezultă:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{w} = -3;\quad \Phi = \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{w}\,dxdydz = -3\iiint_V dxdydz.$$

Pentru calculul integralei triple efectuăm schimbarea de variabile

$$X = -x+y+z,\quad Y = x-y+z,\quad Z = x+y-z$$

pentru care $dxdydz = \dfrac{1}{4}dXdYdZ$. Frontiera Σ a domeniului transformat V_1 are ecuaţia $|X|+|Y|+|Z| = 1$, este un octoedru şi are volumul $4/3$. Rezultă $\Phi = -1$. ■

Exerciţiul 3.8.3. *Fie $\mathbf{a}$ un versor constant, $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ un câmp vectorial de forma $\mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{a}\times\mathbf{u}(r)$ şi Ω un domeniu tridimensional mărginit de suprafaţa închisă Σ, netedă pe porţiuni.*

Să se arate că au loc relaţiile:

$$\textbf{1.}\quad \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\times\mathbf{n}\,d\sigma + \mathbf{a}\iiint\limits_{\Omega} div\,\mathbf{u}\,d\omega = \iiint\limits_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}}\,d\omega;$$

$$\textbf{2.}\quad \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma + \mathbf{a}\cdot \iiint\limits_{\Omega} rot\,\mathbf{u}\,d\omega = 0;$$

$$\textbf{3.}\quad \iint\limits_{\Sigma} div\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})d\sigma + \mathbf{a}\times \iiint\limits_{\Omega} rot\,(rot\,\mathbf{u})d\omega = -\iiint\limits_{\Omega} \frac{d(rot\,\mathbf{u})}{d\mathbf{a}}\,d\omega.$$

Soluţie. Utilizând formula integrală a rotorului (3.85), obţinem

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\times\mathbf{n}d\sigma = -\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\omega.$$

Înlocuind în membrul al doilea pe $\mathbf{v}$ şi ţinând cont de formula (3.82), deducem

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\times\mathbf{n}d\sigma = -\iiint\limits_{\Omega} [\mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mathbf{u}\mathrm{div}\,\mathbf{a} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}]d\omega.$$

Deoarece $\mathbf{a}$ este versor constant, $\mathrm{div}\,\mathbf{a} = 0$ şi $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Prin urmare,

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\times\mathbf{n}d\sigma = -\mathbf{a}\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\,\mathbf{u}\,d\omega + \iiint\limits_{\Omega} (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}d\omega.$$

Cu relaţia (3.47) avem $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\times\mathbf{n}d\sigma = -\mathbf{a}\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{div}\,\mathbf{u}\,d\omega + \iiint\limits_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}}\,d\omega$, de unde rezultă prima identitate.

Pentru a demonstra a doua identitate, aplicăm formula integrală Gauss–Ostrogradski (3.83). totodată şi divergenţa produsului de vectori. Obţinem

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} (\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{u})d\omega = -\mathbf{a}\cdot \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\,d\omega,$$

din care se deduce a doua identitate.

În mod analog, se demonstrează şi cea de a treia identitate. ■

Exerciţiul 3.8.4. *Se consideră câmpul vectorial* $\mathbf{w} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, *unde* $\mathbf{a}$ *este un versor constant şi* $\mathbf{r}$ *este vectorul de poziţie al unui punct* $M(x,y,z)\in\Omega$. *Frontiera domeniului* Ω *este suprafaţa închisă orientabilă* (Σ) *cu proprietăţile precizate la începutul paragrafului.*

Să se arate că au loc relaţiile:

$$\iint\limits_{\Sigma} (div\ \mathbf{w})\mathbf{n}d\sigma = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} rot\ rot\ \mathbf{w}\,d\omega; \tag{3.89}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{n}\times rot\ \mathbf{w})d\sigma = 2\iiint\limits_{\Omega} grad\ div\ \mathbf{w}\,d\omega. \tag{3.90}$$

Soluţie. Calculând divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{w}$, găsim

$$\mathrm{div}\ \mathbf{w} = r^2 - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2.$$

Aplicăm formula integrală a gradientului (3.84) în care $\varphi = \text{div } \mathbf{w}$. Aşadar, vom avea

$$\iint_{\Sigma} (\text{div } \mathbf{w})\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{grad div } \mathbf{w}\, d\omega.$$

Având în vedere expresia lui $\text{div } \mathbf{w}$ şi regulile de calcul cu gradientul, deducem $\text{grad div } \mathbf{w} = 2[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}]$. Pe de altă parte, $\text{rot rot } \mathbf{w} = 4[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}]$, adică

$$\text{rot rot } \mathbf{w} = 2\text{grad div } \mathbf{w} \tag{3.91}$$

şi astfel egalitatea (3.89) este evidentă.

Pentru a demonstra relaţia (3.90) folosim formula integrală a rotorului (3.85) în care câmpul vectorial $\mathbf{v}$ este înlocuit cu $\text{rot } \mathbf{w}$. Prin urmare, avem

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{w}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{rot rot } \mathbf{w}\, d\omega. \tag{3.92}$$

Dacă în relaţia (3.92) facem uz de (3.91) deducem că are loc şi (3.90). ■

Exerciţiul 3.8.5. *Se consideră* $\mathbf{v} = \varphi(r)\mathbf{r}$ *un câmp vectorial definit pe un domeniu* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *a cărui frontieră este suprafaţa închisă şi netedă pe porţiuni* (Σ). *Presupunem că funcţia* φ *este diferenţiabilă pe un interval* $I \subset \mathbb{R}_+$. *Vectorul de poziţie şi mărimea razei vectoare ale punctului* $M(x, y, z) \in \Omega \cup \Sigma$ *sunt*

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad r = \parallel \overrightarrow{OM} \parallel = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3.93}$$

Să se arate că au loc identităţile:

$$\iint_{\Sigma} \varphi(r)\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma - 3 \iiint_{\Omega} \varphi(r)\, d\omega = \iiint_{\Omega} \mathbf{r}\cdot \mathit{grad}\ \varphi(r)\, d\omega; \tag{3.94}$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(r)\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{3.95}$$

unde Γ *este o curbă simplă închisă, netedă pe porţiuni, inclusă în domeniul închis* $\Omega \cup \Sigma$, *care este frontiera unei suprafeţe deschise* $S \subset \Omega \cup \Sigma$.

Soluţie. Din (3.93) rezultă că expresia analitică a câmpului vectorial $\mathbf{v}$ este

$$\mathbf{v} = x\varphi(r)\,\mathbf{i} + y\varphi(r)\,\mathbf{j} + z\varphi(r)\,\mathbf{k},$$

iar divergenţa lui, conform (3.78), este

$$\text{div } \mathbf{v} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

Formula integrală Gauss–Ostrogradski (3.83) conduce la

$$\iint_{\Sigma} \varphi(r)\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma - 3 \iiint_{\Omega} \varphi(r)\, d\omega = \iiint_{\Omega} r\,\varphi'(r)\, d\omega. \tag{3.96}$$

Identitatea (3.94) rezultă din (3.96) deoarece $r\varphi'(r) = \mathbf{r}\cdot\text{grad } \varphi(r)$.

Identitatea (3.95) rezultă din formula lui Stokes (3.88) aplicată câmpului vectorial $\mathbf{v}$, deoarece

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (\varphi(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

■

Capitolul 4

Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea

4.1 Ecuaţiile fizicii matematice

Pentru descrierea matematică a multor *fenomene fizice* este adesea necesară utilizarea derivatelor parţiale ale mărimilor variabile care descriu aceste fenomene. Uneori aceste derivate parţiale trebuie să satisfacă anumite ecuaţii care se numesc de obicei *ecuaţii ale fizicii matematice*.

Ecuaţiile fizicii matematice sunt ecuaţii cu derivate parţiale, liniare sau nu, de ordinul al doilea sau de ordin superior care se întâlnesc în studiul matematic al unor *procese* şi/sau *fenomene din natură* şi *societate*.

Astfel, în studiul *oscilaţiilor unei coarde*, în *oscilaţiile curentului electric într–un conductor*, în studiul *vibraţiilor gazelor* etc. se utilizează o ecuaţie cu derivate parţiale de forma

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t,x), \;\; a \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

pe care o putem numi *ecuaţia coardei vibrante*.

În studiul micilor *vibraţii ale unei membrane* se utilizează o ecuaţie de forma

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(t,x,y), \;\; a \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

numită *ecuaţia propagării undelor cilindrice*.

În studiul propagării sunetului în spaţiul cu trei dimensiuni $\mathbb{R}^3$ se utilizează o ecuaţie de forma

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(t,x,y,z), \;\; a \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

care se numeşte *ecuaţia propagării undelor sferice*.

Cel mai adesea, fiecare dintre ecuaţiile (4.1) – (4.3) poartă denumirea de *ecuaţia neomogenă a propagării undelor* sau pe scurt *ecuaţia undelor*.

În procese de *difuzie a căldurii*, de *filtraţie* a lichidelor sau gazelor prin *medii poroase* se utilizează una dintre ecuaţiile:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(t,x), \quad a \in \mathbb{R}; \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(t,x,y), \quad a \in \mathbb{R}; \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = F(t,x,y,z), \quad a \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

denumită respectiv *ecuatia propagării căldurii* în una, două sau trei dimensiuni.

Dacă în relaţiile (4.1) – (4.6) funcţia F corespunzătoare este nulă, ecuaţia respectivă se numeşte în plus *omogenă*.

Fenomenele electrodinamice sunt descrise de *ecuaţiile lui Maxwell*; acestea sunt:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1)}\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{I} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{I}^e;\\
&\mathbf{2)}\quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};\\
&\mathbf{3)}\quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0;\\
&\mathbf{4)}\quad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = -4\pi\rho;\\
&\mathbf{5)}\quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E};\\
&\mathbf{6)}\quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H};\\
&\mathbf{7)}\quad \mathbf{I} = \sigma\mathbf{E},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

unde $\mathbf{E}$ este *câmpul electric*, $\mathbf{H}$ este *câmpul magnetic*, $\mathbf{D}$ este *vectorul de deplasare a lui Maxwell*, $\mathbf{B}$ este *vectorul inducţiei magnetice*, $\mathbf{I}$ este densitatea de volum a curenţilor, $\mathbf{I}^e$ este *vectorul densităţii de curent generat de forţele electrodinamice aplicate*, ρ este *densitatea maselor electrice*, ε este *constanta dielectrică a mediului*, μ este *permeabilitatea magnetică*, σ este *conductibilitatea mediului*, c este *viteza luminii*, considerată constantă.

Din aceste ecuaţii se deduc altele, utile pentru aplicaţii. De exemplu, aplicând operatorul $\dfrac{\partial}{\partial t}$ în ambii membri ai ecuaţiei 4) şi folosind 1), precum şi relaţia $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$, obţinem

$$c\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\mathbf{I} + \mathbf{I}^e) = 0.$$

În anumite condiţii restrictive, sistemul (4.7) se poate simplifica. Prezentăm două astfel de simplificări.

1. În cazul *fenomenelor electromagnetice în vid* ($\mu = \varepsilon = 0$, $\sigma = 1$, şi în plus $\mathbf{I}^e = \mathbf{0}$), sistemul (4.7) devine:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0. \tag{4.8}$$

În obţinerea acestor ecuaţii s–a ţinut cont de faptul că $\mathbf{I} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

Aplicând în prima ecuaţie din (4.8) operatorul $\dfrac{\partial}{\partial t}$ şi ţinând seama de a doua, obţinem identitatea

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{4.9}$$

Dar,

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} + \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\ \ \mathbf{E}), \tag{4.10}$$

unde $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ este *operatorul lui Laplace în trei dimensiuni* .

Folosind ultima relaţie (4.8), din (4.9) şi (4.10) obţinem

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \tag{4.11}$$

cu alte cuvinte componentele lui $\mathbf{E}$ verifică o ecuaţie de forma $\nabla^2 u = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, care se numeşte *ecuaţia propagării undelor sferice* sau *ecuaţia propagării undelor*.

2. Considerând cazul când $\mathbf{I}^e = \mathbf{0}$, $\varepsilon = \mathrm{const.}$, $\mu = \mathrm{const.}$, $\sigma = \mathrm{const.}$ constatăm că, [22] p. 55, $\mathbf{H}$ şi $\mathbf{E}$ satisfac ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul al doilea:

$$\nabla^2\mathbf{H} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}; \tag{4.12}$$

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{4.13}$$

Din (4.12) şi (4.13), în anumite condiţii impuse constanteleor ε, μ, σ, şi c, componentele câmpului magnetic şi ale celui electric satisfac, după caz, ecuaţia omogenă a propagării căldurii sau ecuaţia omogenă a propagării undelor, [22], p. 55.
Dacă nu am fi presupus că $\mathbf{I}^e = \mathbf{0}$, atunci ecuaţiile (4.12) şi (4.13) nu ar fi fost omogene.

3. În cazul particular când mediul conductor este un fir, cu alte cuvinte când propagarea se face numai într–o direcţie (spre exemplu, axa Ox) dacă presupunem în plus şi faptul că $\mathbf{I}^e \neq \mathbf{0}$, obţinem, la fel ca şi (4.13), ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{F}(t,x), \tag{4.14}$$

a şi b fiind funcţii care se deduc din ε, μ şi σ.

Prin urmare, coordonatele câmpului electric $\mathbf{E}$ se comportă, dupăcaz, ca şi cum ar fi soluţia unei coarde vibrante, fie se propagăîn conductor ca şi temperatura.

Fenomenele în care stările anumitor mărimi fizice nu depind de timp se numesc *fenomene staţionare*.

În probleme de funcţii complexe, de câmpuri electrice sau magnetice staţionare, în studiul stării staţionare a căldurii, în mecanică etc. se utilizează ecuaţii cu derivate parţiale de forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y);\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x,y,z),
\end{aligned}$$

numite corespunzător: *ecuaţia lui Laplace în două dimensiuni*; *ecuaţia lui Laplace în trei dimensiuni*; *ecuaţia lui Poisson în două dimensiuni*; *ecuaţia lui Poisson în trei dimensiuni*.

Ecuaţiile prezentate mai sus provin din studiul unor probleme practice şi nu este necesară cunoaşterea soluţiei generale; soluţia trebuie căutată în anumite condiţii suplimentare.

Din acest punct de vedere, deosebim trei categorii de probleme:

a) Probleme cu condiţii iniţiale (*probleme Cauchy*);

b) Probleme cu condiţii la limită (*condiţii pe frontieră*);

c) Probleme mixte.

În rezolvarea acestor probleme trebuie să se ţină seama de următoarele aspecte matematice ale calculelor:

1. Obtinerea solutiei căutate (*teorema de existenţă a soluţiei*);

2. Soluţia obţinută să fie unică (*teorema de unicitate a soluţiei*);

3. Soluţia depinde continuu de datele problemei (*stabilitatea soluţiei*).

Stabilitatea soluţiei constă în faptul că la variaţii mici ale datelor problemei considerate corespund soluţii care diferă puţin între ele.

Rezolvarea simultană a acestor cerinţe ne conduce la concluzia că *problema este corect pusă*.

4.2 Tipuri de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$, un domeniu oarecare, Ω o submulţime din $\mathbb{R}^6$ şi $F : D \times \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie reală de opt variabile reale.

Definiţia 4.2.1. *O relaţie de forma*

$$F\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) = 0 \tag{4.15}$$

se numeşte ***ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea*** *dacă se cere să se determine toate funcţiile reale* $u = \varphi(x, y)$*, de clasă* $C^2(D)$*, care au proprietatea*

$$F\Big(x, y, \varphi(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y)\Big) = 0, \quad \forall\,(x, y) \in D. \tag{4.16}$$

Definiţia 4.2.2. *Se numeşte* ***soluţie*** *în domeniul* D *a ecuaţiei* (4.15) *orice functie* $u = \varphi(x, y)$*, de clasă* $C^2(D)$*, care are proprietatea* (4.16).

Definiţia 4.2.3. *Variabilele reale* $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ *se numesc* ***variabilele independente*** *ale ecuaţiei cu derivate parţiale* (4.15)*, iar funcţia* $u = u(x, y)$*, care apare în* (4.15) *împreună cu derivatele ei parţiale până la ordinul doi inclusiv, este denumită* ***funcţia necunoscută*** *a ecuaţiei* (4.15).

Definiţia 4.2.4. *Ecuaţia* (4.15) *se numeşte* ***liniară*** *dacă* F *este o funcţie liniară în* u *şi derivatele acesteia.*

Definiţia 4.2.5. *Ecuatia* (4.15) *se numeşte* ***cvasiliniară*** *dacă* F *este o funcţie liniară în derivatele parţiale de ordinul doilea ale funcţiei* u.

În cele ce urmează vom considera ecuaţia cvasiliniară de ordinul al doilea. O asemenea ecuaţie are forma

$$a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\Big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big) = 0, \tag{4.17}$$

unde funcţiile cunoscute a_{11}, a_{12}, a_{22} se presupun a fi cel puţin de clasă C^2 în domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ şi care nu se anulează simultan în D, iar G este o funcţie reală de cinci variabile reale, definită pe un domeniu din $\mathbb{R}^5$.

Definiţia 4.2.6. *Ecuţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea* (4.17) *se numeşte* ***liniară*** *dacă are forma*

$$a_{11}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y) = 0, \tag{4.18}$$

unde b_1, b_2 *şi* f *sunt funcţii cunoscute de clasă cel puţin* C^0 *pe domeniul* $D \subset \mathbb{R}^2$.

Să presupunem că în ecuaţia (4.17) sau în ecuaţia (4.18) se efectuează schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{4.19}$$

Ca urmare a efectuării schimbării de variabile (4.19), ecuaţia (4.17) va avea o nouă formă, ceea ce înseamnă că se poate pune problema alegerii unei asemenea forme a schimbării (4.19) astfel încât ecuaţia (4.17) să poată fi pusă sub o formă cât mai convenabilă.

Aplicând regula de derivare a funcţiilor compuse, găsim că derivatele parţiale de ordinul unu şi doi ale funcţiei necunoscute u, în raport cu variabilele x şi y, se exprimă în funcţie de derivatele lui u în raport cu ξ şi η prin relaţiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \tag{4.20}$$

unde $u(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

Din relaţiile (4.20) deducem că operatorii de derivare parţială faţă de variabilele x şi y se exprimă liniar prin operatorii de derivare parţială în raport cu variabilele ξ şi η, şi anume

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \end{cases} \tag{4.21}$$

unde funcţiile $\xi = \xi(x, y)$ şi $\eta = \eta(x, y)$ sunt date în (4.19).

Aplicând operatorii de derivare parţială $\dfrac{\partial}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial}{\partial y}$ ambilor membri ai relaţiilor (4.20) şi ţinând cont de (4.21) deducem că derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei necunoscute u, în raport cu vechile variabile x şi y, adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

se exprimă cu ajutorul derivatelor parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei u în raport cu variabilele noi, ξ şi η.

Mai jos, se arată cum se obţine derivata parţială secundă $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\Big) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\Big) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \\ &\quad + \Big(\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\Big) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \Big(\frac{\partial \xi}{\partial x}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \Big(\frac{\partial \eta}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}; \end{aligned} \tag{4.22}$$

Celelalte două derivate parţiale de ordinul al doilea se obţin analog.

Derivata parţială mixtă de ordinul doi are expresia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\Big(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}\Big) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}, \tag{4.23}$$

în timp ce a doua derivată parţială secundă nemixtă se exprimă prin relaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot \Big(\frac{\partial \xi}{\partial y}\Big)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot \Big(\frac{\partial \eta}{\partial y}\Big)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \tag{4.24}$$

Introducând expresiile precedente în ecuaţia (4.17) şi scoţând factor comun derivatele parţiale $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, obţinem o ecuaţie de forma

$$c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + H\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = 0, \tag{4.25}$$

unde

$$\begin{cases} c_{11} = a_{11}\Big(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + a_{22}\Big(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\Big)^2, \\ c_{12} = a_{11}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + a_{12}\Big(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\Big) + a_{22}\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\dfrac{\partial \eta}{\partial y}, \\ c_{22} = a_{11}\Big(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + a_{22}\Big(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\Big)^2, \end{cases} \tag{4.26}$$

iar H este o funcţie reală definită pe un domeniu din $\mathbb{R}^5$.

Dacă expresiile (4.20) – (4.24) se înlocuiesc în ecuaţia (4.18), atunci aceasta din urmă devine

$$c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial u}{\partial \eta} + \gamma u + \delta = 0,$$

care arată că noua ecuaţie este de asemenea liniară.

Se observă că ecuaţia (4.25) se simplifică dacă unul din coeficienţii c_{11}, c_{12}, c_{22} se anulează. Pentru aceasta este necesară o alegere convenabilă a schimbării de variabile (4.19).

Se observă că dacă drept funcţie $\xi(x, y)$ se alege o soluţie a ecuaţiei

$$a_{11}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + a_{22}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2 = 0, \tag{4.27}$$

atunci coeficientul c_{11} devine nul şi ecuaţia (4.25) se transformă în una mai simplă.

Fie $\varphi(x, y) = C$ o curbă integrală a ecuaţiei (4.27). Pe această curbă are loc relaţia

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dy = 0,$$

sau

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Înlocuind această expresie a derivatei parţiale $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ în (4.27) şi simplificând cu $\Big(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2$, se obţine ecuaţia

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dy\cdot dx + a_{22}dx^2 = 0 \tag{4.28}$$

numită *ecuaţia caracteristică*. Integralele ecuaţiei (4.28) se numesc *curbe caracteristice* ale ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea (4.17).

Rezolvând ecuaţia (4.28) în raport cu $\dfrac{dy}{dx}$ se obţin două ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi, şi anume:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}; \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \end{cases} \tag{4.29}$$

În funcţie de semnul expresiei de sub radicalii din (4.29), ecuaţia (4.17) se numeşte respectiv:

$$\begin{array}{ll} \text{de tip hiperbolic, dacă} & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0; \\ \text{de tip eliptic, dacă} & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0; \\ \text{de tip parabolic, dacă} & a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0. \end{array}$$

Pentru găsirea soluţiei unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea este necesară efectuarea unor transformări care să conducă la o formă cât mai simplă a acesteia, numită *forma canonică*.

4.3 Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip hiperbolic

În acest caz, avem $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Cele două ecuaţii diferenţiale ordinare (4.29) furnizează soluţiile generale

$$\varphi(x,y) = c_1, \quad \psi(x,y) = c_2.$$

Luând $\xi = \varphi(x,y)$ şi $\eta = \psi(x,y)$, expresiile coeficienţilor c_{11} şi c_{22} devin identic nule şi împărţind cu coeficientul derivatei $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$, ecuaţia (4.25) devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = H_1\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big), \tag{4.30}$$

care se numeşte *forma canonică!a unei ecuaţii!de tip hiperbolic*.

Exemplul 4.3.1. *Să se reducă la forma canonică şi apoi să se integreze ecuaţia liniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică ataşată $\Big(\dfrac{dy}{dx}\Big)^2 - 2\dfrac{dy}{dx} - 3 = 0$ are soluţiile $\dfrac{dy}{dx} = 3$ şi $\dfrac{dy}{dx} = -1$, care au respectiv integralele generale (soluţiile generale) $3x - y = c_1$ şi $x + y = c_2$. Din punct de vedere geometric fiecare dintre aceste soluţii generale reprezintă o familie de drepte în plan.

Conform teoriei prezentate, se face schimbarea de variabile $\begin{cases} \xi = 3x - y, \\ \eta = x + y \end{cases}$ şi se calculează derivatele parţiale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = 3\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(3\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = 9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = 3\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = -3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

care înlocuite în ecuaţie conduc la forma canonică

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Pentru obţinerea soluţiei acestei ecuaţii canonice, se notează $\omega = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ şi ecuaţia devine $2\dfrac{\partial \omega}{\partial \xi} + \omega = 0$, care este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi. Sistemul caracteristic corespunzător ultimei ecuaţii este

$$\frac{d\xi}{2} = \frac{d\eta}{0} = -\frac{d\omega}{\omega}.$$

Integralele prime ale acestui sistem caracteristic sunt: $\omega \cdot e^{\xi/2} = c_1$; $\eta = c_2$, unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare. Soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi este funcţia $\omega = \omega(\xi, \eta)$ definită implicit de ecuaţia $F(\omega\cdot e^{\xi/2},\eta)=0$, din care rezultă $\omega=e^{-\xi/2}\Phi(\eta)$, unde Φ este o funcţie arbitrară. Ţinând cont de ce s–a notat cu ω, deducem că $u=u(\xi,\eta)$ este soluţia ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=e^{-\xi/2}\Phi(\eta),$$

a cărei sistem caracteristic este $\dfrac{d\xi}{0}=\dfrac{d\eta}{1}=\dfrac{du}{e^{-\xi/2}\Phi(\eta)}$. Procedând ca mai sus, găsim că soluţia generală $u=u(\xi,\eta)$ a ecuaţiei canonice este

$$u=e^{-\xi/2}\phi(\eta)+\psi(\xi),$$

unde ϕ şi ψ sunt funcţii arbitrare.

Soluţia generală $u=u(x,y)$ a ecuaţiei iniţiale se determină din relaţia precedentă în care facem $\xi=3x-y$ şi $\eta=x+y$. Obţinem $u(x,y)=e^{(y-3x)/2}\phi(x+y)+\psi(3x-y)$. ■

Exemplul 4.3.2. *Să se integreze ecuaţia liniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4x+3\cos y.$$

Soluţie. A integra o ecuaţie diferenţială înseamnă a determina toate soluţiile sale.

Căutăm o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale în forma

$$u(x,y)=u_o(x,y)+u_p(x,y),$$

unde $u_o(x,y)$ este soluţia ecuaţiei omogene $u_{xx}-u_{yy}=0$, iar $u_p(x,y)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, de forma membrului drept.

Pentru a integra ecuaţia omogenă, o vom aduce mai întâi la forma canonică. Uşor se constată că ecuaţia omogenă este de tip hiperbolic, iar ecuaţia sa caracteristică este $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-1=0$, din care deducem că cele două ecuaţii diferenţiale ale caracteristicilor sunt $\dfrac{dy}{dx}=1$ şi $\dfrac{dy}{dx}=-1$. Prima dintre ele are soluţia generală $y-x=c_1$, iar cea de a doua are soluţia generală $y+x=c_2$.

Se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases}\xi=y-x,\\ \eta=y+x\end{cases}$$

şi se calculează derivatele parţiale

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

care înlocuite în ecuaţia omogenă, conduc la forma canonică

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0.$$

Integrând această ecuaţie redusă la forma canonică, găsim că funcţia u, ca funcţie de ξ şi η are expresia

$$u=\phi(\xi)+\psi(\eta),$$

unde $\phi(\xi)$ şi $\psi(\eta)$ sunt funcţii diferenţiabile arbitrare.

Revenind la schimbarea de variabilă, se obţine soluţia ecuaţiei omogene

$$u_o(x,y) = \phi(y-x) + \psi(y+x).$$

Pentru ecuaţia neomogenă încercăm o soluţie particulară de forma membrului drept, adică

$$u_p(x,y) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 + b\cos y.$$

Calculând derivatele parţiale necesare şi impunând ca u_p să fie soluţia ecuaţiei neomogene, se obţine

$$6a_0x + 2a_1 + b\cos y = 4x + 3\cos y.$$

Prin identificare, se găseşte $a_0 = 2/3$, $a_1 = 0$ şi $b = 3$, iar soluţia particulară devine

$$u_p(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + a_2x + a_3 + 3\cos y.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$u(x,y) = \phi(y-x) + \psi(y+x) + \frac{2}{3}x^3 + a_2x + a_3 + 3\cos y,$$

unde funcţiile ϕ şi ψ sunt complet arbitrare, iar constantele a_2 şi a_3 sunt de asemenea arbitrare. ■

Exemplul 4.3.3. *Să se integreze ecuaţia*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 3\ln x + 2\ln y.$$

Soluţie. Se procedează ca la exerciţiul precedent căutând o soluţie de forma

$$u(x,y) = u_o(x,y) + u_p(x,y),$$

unde u_o şi u_p au semnificaţii asemănătoare, dar raportate la ecuaţia dată.

Se constată că cele două familii de curbe caracterisxtice (ecuaţia dată este de tip hiperbolic) sunt $\ln x = c_1$ şi $\ln y = c_2$, ceea ce ne determină să efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \ln x, \\ \eta = \ln y. \end{cases}$$

În final suntem conduşi la rezultatul

$$u(x,y) = \phi\Big(\ln\frac{x}{y}\Big) + \psi(\ln xy) + \frac{1}{2}\ln^3 x + \frac{1}{2}\ln^3 y,$$

unde ϕ şi ψ sunt funcţii diferenţiabile arbitrare. ■

4.4 Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip parabolic

În acest caz, are loc relaţia $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. De aici, rezultă că a_{11} şi a_{22} au acelaşi semn, care poate fi presupus pozitiv şi deci $a_{12} = \pm\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}$. Vom considera că şi a_{12} este pozitiv, cazul $a_{12} < 0$ tratându–se asemănător. Coeficientul c_{11} se poate scrie în forma

$$c_{11} = \Big(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)^2.$$

Cele două ecuaţii (4.29) coincid şi furnizează o singură integrală generală, şi anume $\varphi(x,y)=c$.

Efectuând schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y), \end{cases}$$

unde $\psi(x,y)$ este o funcţie independentă funcţional de φ, expresia lui c_{11} devine nulă, ceea ce atrage relaţia

$$\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}=0. \tag{4.31}$$

Dacă în expresia lui c_{12} folosim că $a_{12}=\pm\sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{22}}$, atunci constatăm cu uşurinţă că expresia lui c_{12} este

$$c_{12}=\Big(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}\Big)\cdot\Big(\sqrt{a_{11}}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\eta}{\partial y}\Big).$$

Folosind (4.31), deducem $c_{12}=0$.

După împărţirea cu c_{22}, ecuaţia (4.25) are forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=H_2\Big(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big). \tag{4.32}$$

Exemplul 4.4.1. *Să se reducă la forma canonică, ecuaţia*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad x\neq 0,\quad y\neq 0.$$

Pornind de la forma canonică găsită, determinaţi soluţia generală a ecuaţiei date.

Soluţie. Deoarece $a_{12}^2-a_{11}\cdot a_{22}=(xy)^2-x^2y^2=0$, rezultă că ecuaţia este de tip parabolic. Ecuaţia caracteristică ataşată,

$$x^2\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2-2xy\frac{dy}{dx}+y^2=0,$$

este echivalentă cu ecuaţia cu variabile separabile $x\dfrac{dy}{dx}-y=0$ a carei solutie generală este $\dfrac{y}{x}=c$. Conform teoriei prezentate, se efectuează următoarea schimbare de variabile

$$\begin{cases} \xi=\dfrac{y}{x}\\ \eta=y. \end{cases}$$

Calculând derivatele parţiale de ordinele întâi şi doi, se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi};\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial y}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}+\dfrac{\partial u}{\partial\eta};\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{y^2}{x^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{2y}{x^3}\dfrac{\partial u}{\partial\xi};\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{y}{x^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\dfrac{y}{x^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial u}{\partial\xi};\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} \end{cases}$$

Înlocuind derivatele parţiale în ecuaţia iniţială, obţinem forma canonică $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, de unde rezultă că forma generală a funcţiei $u = u(\xi, \eta)$ care satisface această ecuaţie este $u = \eta \cdot f(\xi) + g(\xi)$, în care f şi g sunt funcţii arbitrare de două ori diferenţiabile pe un interval din $\mathbb{R}$.

Revenind la variabilele x şi y găsim $u(x,y) = yf\Big(\dfrac{y}{x}\Big) + g\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ şi această funcţie este soluţia generală a ecuaţiei iniţiale. ■

Exemplul 4.4.2. *Să se reducă la forma canonică şi apoi să se integreze ecuaţia liniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ştiind că sunt satisfăcute condiţiile iniţiale

$$u(1,y) = 1 - \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 2y. \tag{4.33}$$

Soluţie. Deoarece $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = (xy)^2 - x^2 \cdot y^2 = 0$ rezultă că ecuaţia este de tip parabolic.

Ecuaţia caracteristică ataşată

$$x^2\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

este echivalentă cu ecuaţia diferenţială ordinară $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$, care are soluţia generală $xy = c$.

Conform teoriei prezentată, efectuăm schimbarea de variabile $\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = x, \end{cases}$ unde η este cea mai simplă funcţie aleasă astfel încât $\xi = \xi(x,y)$ şi $\eta = \eta(x,y)$ să fie independente funcţional. Calculăm derivatele parţiale şi găsim:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x\dfrac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + x\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \end{cases}$$

După înlocuirea derivatelor parţiale de mai sus în ecuaţia din enunţ, se obţine forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Pentru obţinerea soluţiei, se notează $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \omega$ şi ecuaţia devine $\dfrac{\partial \omega}{\partial \eta} + \dfrac{1}{\eta} \cdot \omega = 0$, care este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi a cărei sistem caracteristic este

$$\frac{d\xi}{0} = \frac{d\eta}{\eta} = \frac{d\omega}{-\omega}.$$

Cele două integrale prime ale acestui sistem simetric sunt $\xi = c_1$ şi $\omega \cdot \eta = c_2$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi este funcţia $\omega = \omega(\xi, \eta)$ definită implicit de ecuaţia $F(\xi, \omega \cdot \eta) = 0$, unde F este o funcţie diferenţiabilă arbitrară. Se observă că ecuaţia $F(\xi, \omega \cdot \eta) = 0$ se explicitează simplu şi avem

$$\omega = \frac{1}{\eta} \cdot f(\xi), \tag{4.34}$$

unde $f(\xi)$ este o funcţie arbitrară, care se deduce din F.

Ţinând cont că $\omega = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}$, ecuaţia (4.34) devine $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{1}{\eta}\cdot f(\xi)$, care are soluţia generală $u = f(\xi)\cdot \ln\eta + g(\xi)$, unde g este o funcţie derivabilă arbitrară.

Revenind la variabilele x şi y, găsim că soluţia generală a ecuaţiei din enunţ este

$$u = f(xy)\cdot \ln x + g(xy).$$

Funcţiile f şi g se determină din condiţiile iniţiale (4.33), care conduc la relaţiile:

$$g(y) = 1 - \cos y; \quad f(y) + yg'(y) = 2y,$$

din care deducem $f(y) = y(2 - \sin y)$ şi $g(y) = 1 - \cos y$.

Prin urmare,

$$u(x,y) = x\cdot y\cdot (2 - \sin xy)\cdot \ln x + 1 - \cos(x\cdot y).$$

este soluţia ecuaţiei din enunţ care satisface condiţiile iniţiale (4.33). ■

4.5 Reducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip eliptic

În acest caz $a_{12}^2 - a_{11}\cdot a_{22} < 0$ şi integralele generale ale ecuaţiilor diferenţiale ordinare (4.29) sunt de forma:

$$\varphi(x,y) = c_1; \quad \overline{\varphi}(x,y) = c_2,$$

unde $\overline{\varphi}$ este conjugata funcţiei cu valori complexe φ. Prin urmare,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \alpha(x,y) + i\beta(x,y), \\ \overline{\varphi}(x,y) &= \alpha(x,y) - i\beta(x,y). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Se efectuează transformarea

$$\begin{cases} \xi = \alpha(x,y), \\ \eta = \beta(x,y). \end{cases} \tag{4.36}$$

Deoarece $\varphi(x,y) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y)$ este soluţia ecuaţiei (4.27), rezultă că $\alpha = \alpha(x,y)$ şi $\beta = \beta(x,y)$ satisfac ecuaţia

$$a_{11}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\beta}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + i\frac{\partial\beta}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + i\frac{\partial\beta}{\partial y}\Big) + a_{22}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + i\frac{\partial\beta}{\partial y}\Big)^2 = 0$$

care, după efectuarea operaţiilor de ridicare la pătrat şi înmulţire, devine

$$\begin{aligned} &\Big(a_{11}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} + a_{22}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\Big)^2\Big) - \Big(a_{11}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\Big)^2 + 2a_{12}\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} + a_{22}\Big(\frac{\partial\beta}{\partial y}\Big)^2\Big) + \\ &+2i\Big(a_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x} + a_{12}\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x}\Big) + a_{22}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}\Big) = 0. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Din (4.26), (4.36) şi (4.37) rezultă

$$c_{11} - c_{22} + 2ic_{12} = 0. \tag{4.38}$$

Însă, o funcţie complexă este nulă dacă şi numai dacă partea reală şi partea imaginară sunt nule, astfel că din (4.38) obţinem $c_{11} = c_{22}$ şi $c_{12} = 0$.

Dacă împărţim cu c_{11}, ecuaţia (4.25) se scrie sub forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = H_3\Big(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\Big),$$

unde funcţia necunoscută este $u = u(\xi,\eta)$.

Exemplul 4.5.1. *Să se reducă la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluţie. Avem $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x^2y^2 < 0$, deci ecuaţia este de tip eliptic. Ecuaţiile (4.29) corespunzătoare sunt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-1\pm i)y}{x}.$$

Integrând ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul întâi corespunzătoare semnului plus, găsim

$$\ln(xy) - i\ln x = c,$$

de unde deducem că trebuie efectuată schimbarea de variabile $\begin{cases}\xi = \ln xy\\ \eta = \ln x.\end{cases}$ Aplicând teoria dezvoltată mai sus pentru calculul derivatelor parţiale de ordinele întâi şi doi, găsim expresiile:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} &= \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \eta};\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} &= \dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \xi};\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{2}{x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta} + \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \eta};\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \dfrac{1}{xy}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{1}{xy}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta};\\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \dfrac{1}{y^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \dfrac{1}{y^2}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \eta},\end{cases}$$

care introduse în ecuaţia iniţială, o simplifică, devenind

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

Din a doua relaţie a schimbării de variabile deducem $x = e^\eta$, pe care dacă o folosim în relaţia precedentă găsim că expresia canonică a ecuaţiei considerate este $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - e^{2\eta}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$ ■

Exemplul 4.5.2. *Să se reducă la forma canonică şi apoi să se integreze, ecuaţia liniară cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Soluţie. Deoarece $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(1+x^2)(1+y^2) < 0$, rezultă că ecuaţia este de tip eliptic.

Ecuaţia caracteristică ataşată

$$(1+x^2)\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 + (1+y^2) = 0,$$

care se mai poate scrie în forma $(1+x^2)(dy)^2 + (1+y^2)(dx)^2 = 0$, este echivalentă cu ecuaţiile diferenţiale

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = i\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}},\\[2mm] \dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = -i\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases}\ln(y+\sqrt{1+y^2}) - i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = c_1,\\ \ln(y+\sqrt{1+y^2}) + i\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = c_2,\end{cases}$$

unde c_1 şi c_2 sunt constante arbitrare.

Se efectuează următoarea schimbare de variabile $\begin{cases} \xi = \ln{(y + \sqrt{1+y^2})} \\ \eta = \ln{(x + \sqrt{1+x^2})}. \end{cases}$ Se calculează derivatele parţiale şi se obţine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} & = & \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & = & \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & = & \dfrac{1}{1+x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\dfrac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & = & \dfrac{1}{1+y^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \dfrac{y}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Înlocuind derivatele parţiale în ecuaţia iniţială, obţinem forma canonică $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$. Pentru integrarea ecuaţiei canonice, se caută soluţii de forma $u(\xi, \eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta}$. Această funcţie este soluţie a ecuaţiei canonice dacă $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ sau $\lambda = \pm i\mu$.

În acest mod, am determinat două soluţiile particulare $\tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda)$ şi $\tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda)$, unde

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda(\xi + i\eta)} = e^{\lambda\xi}(\cos\lambda\eta + i\sin\lambda\eta), \\ \tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda(\xi - i\eta)} = e^{\lambda\xi}(\cos\lambda\eta - i\sin\lambda\eta). \end{cases}$$

iar λ este o constantă reală arbitrară, care însă sunt funcţii complex conjugate.

Datorită faptului că ecuaţia canonică este liniară, rezultă că funcţiile reale

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta; \lambda) = \dfrac{\tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda) + \tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda)}{2}, \\ u_2(\xi, \eta; \lambda) = \dfrac{\tilde{u}_1(\xi, \eta; \lambda) - \tilde{u}_2(\xi, \eta; \lambda)}{2i} \end{cases}$$

sunt de asemeni soluţii. Efectuând calculele, găsim

$$\begin{cases} u_1(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda\xi}\cos\lambda\eta, \\ u_2(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda\xi}\sin\lambda\eta. \end{cases}$$

Prin verificare directă se constată că orice funcţie de forma

$$u(\xi, \eta; \lambda) = e^{\lambda\xi}\Big(F_1(\lambda)\cos\lambda\eta + F_2(\lambda)\sin\lambda\eta\Big),$$

unde $F_1(\lambda)$ şi $F_2(\lambda)$ sunt funcţii arbitrare, este de asemeni o soluţie a ecuaţiei canonice. Parametrul λ poate lua orice valoare reală.

Folosind principiul superpoziţiei, deducem că soluţia generală a ecuaţiei canonice este

$$u(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda\xi}\Big(F_1(\lambda)\cos\lambda\eta + F_2(\lambda)\sin\lambda\eta\Big)d\lambda.$$

Revenind la variabilele iniţiale x şi y, găsim că soluţia generală a ecuaţiei considerate este

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y + \sqrt{1+y^2})^{\lambda}\Big(F_1(\lambda)\cos{(\lambda\ln{(x + \sqrt{1+x^2})})} + F_2(\lambda)\sin{(\lambda\ln{(x + \sqrt{1+x^2})})}\Big)d\lambda,$$

unde $F_1(\lambda)$ şi $F_2(\lambda)$ sunt funcţii reale arbitrare absolut integrabile pe axa reală. ∎

Capitolul 5

Ecuaţii cu derivate parţiale de tip hiperbolic

5.1 Ecuaţia coardei vibrante

Se consideră un fir flexibil pentru care lungimea este dimensiunea predominantă, celelalte fiind neglijabile, numit în cele ce urmează *coardă elastică*. Să presupunem că

a) în poziţia de echilibru, coarda ocupă segmentul OA pe axa Ox;

b) prin aplicarea unei forţe, coarda execută *oscilaţii* în planul vertical xOu;

c) în timpul vibraţiei, fiecare punct al coardei execută *oscilaţii verticale* pe o dreaptă perpendiculară pe poziţia de echilibru.

Fie o coardă elastică omogenă, de lungime ℓ care, în repaos, ocupă poziţia segmentului OA pe axa Ox.

Prin aplicarea unor forţe, coarda execută vibraţii în planul xOu.

Fie M un punct arbitrar al coardei şi $M_0(x)$ poziţia sa de repaos. Să presupunem că punctul M, în mişcare, rămâne într–un plan perpendicular pe OA. *Deplasarea* de la M_0 la M depinde de x şi de timpul t. Se demonstrează că dacă $u = u(x, t)$ reprezintă deplasarea punctelor coardei faţă de poziţia de echilibru (*elongaţia coardei*), măsurată în punctul de abscisă $x \in [0, \ell]$, la momentul $t > 0$, atunci $u(x, t)$ verifică ecuaţia

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \quad a \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Ecuaţia (5.1) se numeşte *ecuaţia neomogenă a coardei vibrante* sau *ecuaţia undelor unidimensionale*. Această ecuaţie se întâlneşte în studiul *propagării undelor elastice* cum ar fi cele *acustice*, *optice*, *electromagnetice* şi din acest motiv se mai numeşte *ecuaţia undelor* sau *ecuaţia propagării undelor elastice*.

Constanta a^2 are valoarea $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$, unde T_0 este mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale pe axa Ox a *vectorului tensiune* în coarda aflată în repaos (*poziţia de echilibru*) şi ρ este densitatea materialului din care este confecţionat firul extensibil, presupus omogen, adică masa unei unităţi de lungime a coardei, iar $f(t, x)$ este mărimea algebrică a rezultantei forţelor exterioare.

Se spune despre o coardă că este *infinită* dacă lungimea ei este foarte mare în comparaţie cu elongaţiile maxime. Un fir de telegraf foarte lung poate servi ca exemplu de coardă infinită.

Ecuaţia

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

se numeşte *ecuaţia omogenă a coardei vibrante*.

Din considerente practice, soluţiile ecuaţiei (5.1), sau (5.2), vor trebui să verifice şi alte condiţii suplimentare. De exemplu, în cazul în care $u(t, x)$ reprezintă vibraţiile unei coarde elastice, omogene, fixată la capete, vom avea *condiţii la limită* de forma:

$$u(t, 0) = 0; \quad u(t, \ell) = 0. \tag{5.3}$$

Integrarea ecuaţiei coardei vibrante constă în a–i determina unul din modurile posibile de vibraţie descris de funcţia $u(t,x)$ mod care va fi bine determinat numai dacă se cunosc apriori *poziţia iniţială* şi *viteza iniţială* coardei, numite *condiţii!iniţiale*:

$$u(t,x)|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)|_{t=0} = \psi(x). \tag{5.4}$$

Aceasta înseamnă că în timpul vibraţiei realizate prin modul pe care vrem să–l determinăm, vom cunoaşte în fiecare moment $t > 0$ poziţia punctului de pe coardă, de abscisă x, dacă la începutul mişcării, în momentul $t = 0$, este dată poziţia fiecărui punct al coardei prin plasarea sa pe graficul funcţiei $\varphi(x)$, precum şi distribuţia vitezelor fiecărui punct al acestui grafic prin valorile funcţiei $\psi(x)$.

Condiţiile (5.4) se numesc condiţii iniţiale ale *problemei Cauchy pentru coarda vibrantă*.

Deci, $\varphi(x)$ ne dă profilul coardei la momentul iniţial, iar $\psi(x)$ ne dă viteza cu care vibrează punctele coardei la momentul $t = 0$.

Dacă coarda este de lungime infinită, se pune problema determinării funcţiei $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia (5.1) cu condiţiile iniţiale (5.3). Pentru aceasta există două metode: *metoda lui d'Alembert*[1] şi *metoda separării variabilelor* sau *metoda lui Fourier* [2].

În cele ce urmează vom studia cazurile când coarda vibrantă este finită sau infinită, iar ecuaţia ei este omogenă sau neomogenă.

5.2 Metoda lui d'Alembert de integrare a ecuaţiei omogene a coardei vibrante infinite

Fie coarda vibrantă de lungime infinită ale cărei elongaţii satisfac ecuaţia de tip hiperbolic (5.2) în mulţimea $\mathbb{R} \times [0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$, la care se adaugă condiţiile iniţiale

$$u(0,x) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare, dată de

$$a^2\Big(\frac{dt}{dx}\Big)^2 - 1 = 0, \tag{5.6}$$

este echivalentă cu

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} t = -\dfrac{1}{a}x + c_1 \\ t = \dfrac{1}{a}x + c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} at + x = c_1 \\ at - x = c_2. \end{cases}$$

Prin urmare, curbele caracteristice ale ecuaţiei omogene a coardei vibrante sunt drepte.

Conform teoriei prezentate, efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at. \end{cases} \tag{5.7}$$

[1] d'Alembert, Jean le Rond (1717 – 1783), matematician, fizician şi filozof francez. Rezultatele sale din domeniul matematicii, în particular cele legate de rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale, au găsit aplicaţii imediate în fizică şi astronomie. Mai multe noţiuni din matematică şi fizică au primit numele său: *metoda lui d'Alembert* pentru rezolvarea ecuaţiei propagării undelor şi *formula lui d'Alembert* care exprimă soluţia acestei ecuaţii, principiul lui d'Alembert privitor la forţele şi acceleraţiile unui sistem de particule, *teorema lui d'Alembert* legată de numărul rădăcinilor unui polinom în mulţimea numerelor complexe, criteriul lui d'Alembert de convergenţă a unor serii etc.

[2] Fourier, *baron* Joseph (1768 – 1830), matematician francez. Studiind propagarea căldurii, el descoperi seriile trigonometrice cunoscute drept *serii Fourier*, puternic instrument matematic. A fost membru al Academiei Franceze de Ştiinţe.

Aplicând regulile de derivare ale funcţiilor compuse, găsim că derivatele parţiale de ordinul al doilea, nemixte, ale funcţiei necunoscute sunt date de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\Big) \end{cases} \tag{5.8}$$

Înlocuind (5.8) în (5.2) se obţine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \tag{5.9}$$

care reprezintă forma canonică a ecuaţiei omogene a propagării undelor.

Ecuaţia (5.9) se mai poate scrie în forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}\Big) = 0,$$

din care deducem că derivata parţială $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}$ depinde doar de variabila ξ, adică

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi), \tag{5.10}$$

unde $f(\xi)$ este o funcţie arbitrară, care admite primitive.

Prin integrarea ecuaţiei diferenţiale (5.10) găsim

$$u(\xi, \eta) = h_1(\xi) + h_2(\eta),$$

unde h_1 este o primitivă a funcţiei f, iar h_2 este o funcţie arbitrară.

Revenind la vechile variabile, se obţine

$$u(x, t) = h_1(x + at) + h_2(x - at), \tag{5.11}$$

care reprezintă *soluţia generală* a ecuaţiei omogene a coardei vibrante.

Impunând funcţiei (5.11) să satisfacă condiţiile iniţiale (5.5), deducem că funcţiile h_1 şi h_2 trebuie să satisfacă sistemul

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) &= \varphi(x) \\ h_1'(x) - h_2'(x) &= \dfrac{1}{a}\psi(x). \end{cases} \tag{5.12}$$

Scriind cea de a doua ecuaţie din (5.12) în forma $h_1'(\tau) - h_2'(\tau) = \dfrac{1}{a}\psi(\tau)$ şi integrând această egalitate între limitele 0 şi x, obţinem

$$h_1(x) - h_2(x) = c + \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\tau)d\tau, \tag{5.13}$$

unde constanta c reprezintă valoarea în $x = 0$ a funcţiei $h_1 - h_2$.

Considerând (5.13) şi prima ecuaţie din sistemul (5.12), constatăm că funcţiile h_1 şi h_2 se determină din sistemul

$$\begin{cases} h_1(x) + h_2(x) &= \varphi(x) \\ h_1(x) - h_2(x) &= c + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{5.14}$$

Rezolvând sistemul (5.14), găsim pentru valorile funcţiilor h_1 şi h_2 expresiile

$$\begin{cases} h_1(x) &= \dfrac{1}{2}\varphi(x) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)d\tau + \dfrac{c}{2} \\ h_2(x) &= \dfrac{1}{2}\varphi(x) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)d\tau - \dfrac{c}{2}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Pentru a determina soluţia problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită, adică soluţia în $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ a ecuaţiei liniare omogene cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic (5.2) care să satisfacă condiţiile iniţiale (5.5), avem nevoie de valorile funcţiilor h_1 şi h_2 în respectiv punctele $x + at$ şi $x - at$. Din (5.15), avem

$$\begin{cases} h_1(x+at) &= \dfrac{1}{2}\varphi(x+at) + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{x+at} \psi(\tau)d\tau + \dfrac{c}{2} \\ h_2(x-at) &= \dfrac{1}{2}\varphi(x-at) - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^{x-at} \psi(\tau)d\tau - \dfrac{c}{2}. \end{cases} \tag{5.16}$$

Soluţia problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită se obţine atunci din (5.11) şi (5.16) şi se vede simplu că se poate scrie sub forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\Big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)d\tau. \tag{5.17}$$

Relaţia (5.17) este denumită uneori *formula lui d'Alembert*.

5.3 Metodă alternativă de deducere a formulei lui d'Alembert

De data aceasta, coardei vibrante infinite îi vom spune *coardă elastică infinită*. Considerăm o coardă elastică suficient de lungă încât să putem presupune că are lungime infinită. Sub acţiunea unor factori externi, coarda vibrează. La momentul $t = 0$ configuraţia corzii este graficul funcţiei $f(x)$ definită pe întreaga axă reală. La momentul $t > 0$, datorită vibraţiilor, configuraţia corzii este alta, să zicem $u(x, t)$.

Funcţia $u = u(x, t)$ se numeşte **săgeată**.

Presupunem că se cunoaşte viteza $g(x)$ cu care se schimbă forma corzii la momentul $t = 0$, deci cunoaştem valoarea în punctul $(x, 0)$ a derivatei parţiale în raport cu variabila temporară t a funcţiei $u(x, t)$.

Din teoria elasticităţii se ştie că legea după care vibrează coarda este

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5.18}$$

Ne propunem să se determinăm printr–o altă metodă poziţia corzii la orice moment şi în orice punct al ei.

Problema pusă se reduce la determinarea acelei soluţii $u(x, t)$ a ecuaţiei (5.18) care satisface *condiţiile iniţiale*

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{5.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \tag{5.20}$$

Astfel, avem de rezolvat o *problemă de tip Cauchy pentru ecuaţia diferenţială* (5.18) *cu condiţiile iniţiale* (5.19) şi (5.20).

Pentru aceasta, vom înmulţi ecuaţia cu $e^{-i\xi x}$ după care integrăm în raport cu x de la $-\infty$ la $+\infty$.

Derivarea parţială în raport t comută cu integrarea în raport cu x, astfel că putem scrie

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx. \tag{5.21}$$

În membrul drept al relaţiei (5.21) se aplică următorul rezultat de la transformata Fourier

Teorema 5.3.1. *Dacă primele $r - 1$ derivate ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tind la zero când $|t| \to \infty$ iar $f^{(r)}(t)$ este absolut integrabilă, atunci*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^r f}{dt^r}(t)\, e^{-iut}\, dt = (iu)^r\, F(u). \tag{5.22}$$

Aplicând Teorema 5.3.1, obţinem ecuaţia

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2U}{dt^2}(\xi,t)+\xi^2U(\xi,t)=0, \tag{5.23}$$

unde funcţia $U(\xi,t)$ este transformata Fourier a funcţiei $u(x,t)$.

În felul acesta, cu ajutorul transformatei Fourier am înlocuit ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale (5.18) cu ecuaţia diferenţială ordinară (5.23).

Condiţiile iniţiale (5.19) şi (5.20) se transformă respectiv în

$$U(\xi,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-\,i\xi x}\,dx \quad = \quad F(\xi); \tag{5.24}$$

$$\frac{dU}{dt}(\xi,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\,e^{-\,i\xi x}\,dx=G(\xi). \tag{5.25}$$

Astfel, avem de rezolvat o problemă de tip Cauchy pentru ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul doi, liniară, (5.23) cu condiţiile iniţiale (5.24) şi (5.25).

Un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (5.23) conţine funcţiile

$$U_1(\xi,t)=\cos a\xi t,\quad U_2(\xi,t)=\sin a\xi t.$$

Atunci, soluţia generală a ecuaţiei (5.23) este

$$U(\xi,t)=C_1U_1(\xi,t)+C_2U_2(\xi,t)=C_1\cos a\xi t+C_2\sin a\xi t$$

unde constantele de integrare C_1 şi C_2 sunt funcţii de ξ. Însă,

$$U(\xi,0)=C_1(\xi)=F(\xi),\quad \frac{dU}{dt}(\xi,0)=a\xi C_2(\xi)=G(\xi).$$

Dacă folosim relaţiile lui Euler, rezultă că expresia lui $U(\xi,t)$ este

$$U(\xi,t)=\frac{1}{2}F(\xi)(e^{\,iat\xi}+e^{-iat\xi})+\frac{G(\xi)}{2ia\xi}(e^{\,iat\xi}-e^{-iat\xi}). \tag{5.26}$$

Aplicând transformarea Fourier inversă funcţiei $U(\xi,t)$, obţinem

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U(\xi,t)\,e^{\,ix\xi}\,d\xi. \tag{5.27}$$

Înlocuind în (5.27) pe $U(\xi,t)$ din (5.26) şi ţinând cont de rezultatele

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\xi)\,e^{\,i(x\pm at)\xi}\,d\xi=f(x\pm at),\quad g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\xi)e^{\,iu\xi}d\xi,$$

$$\begin{aligned}\int_{x-at}^{x+at}g(u)\,du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\xi)\Big(\int_{x-at}^{x+at}e^{\,i\xi u}\,du\Big)d\xi=\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(\xi)}{i\,\xi}\Big(e^{\,i(x+at)\xi}+e^{\,i(x-at)\xi}\Big)d\xi,\end{aligned}$$

regăsim soluţia de la paragraful precedent

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+at)+f(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(u)\,du.$$

5.4 Unicitatea soluţiei problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită

Metoda lui d'Alembert dezvoltată în subsecţiunea precedentă demonstrează în fond existenţa soluţiei problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită, nu însă şi unicitatea sa.

Teorema 5.4.1. *Soluţia problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită este unică.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra unicitatea, presupunem că există două soluţii distincte $u_1(x,t)$ şi $u_2(x,t)$. Datorită liniarităţii ecuaţiei (5.2), rezultă că diferenţa celor două soluţii

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

este de asemenea o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (5.2), care însă satisface condiţii iniţiale identic nule

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,$$

ceea ce înseamnă că funcţiile φ şi ψ din (5.5) sunt identic nule.

Conform formulei lui d'Alembert (5.17), soluţia problemei Cauchy a coardei vibrante infinită, cu condiţii iniţiale nule, este funcţia identic nulă, deci $u(x,t) = 0$, $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$. **q.e.d.**

Observaţia 5.4.1. *Soluţia problemei Cauchy pentru coarda vibrantă infinită este unică şi este dată de formula lui d'Alembert* (5.17).

Exemplul 5.4.1. *Să se integreze ecuaţia coardei vibrante infinită*

$$\frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u(0,x) = x^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 3x^2. \end{cases}$$

Soluţie. În acest caz, $a = 3$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 3x^2$.

Aplicând formula lui d'Alembert (5.17), găsim că soluţia problemei Cauchy este

$$u(x,t) = \frac{(x+3t)^2 + (x-3t)^2}{2} + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} 3\tau^2\, d\tau$$

sau

$$u(x,t) = x^2 + 3x^2 t + 9t^2 + 9t^3.$$

■

5.5 Metoda separării variabilelor de integrare a ecuaţiei omogene a coardei vibrante finite

Prin coardă vibrantă finită se înţelege un fir dintr–un material extensibil, omogen, fixat la capetele $x = 0$ şi $x = \ell$, unde ℓ este lungimea coardei. Prin urmare, în poziţia de echilibru, coarda ocupă segmentul $[0,\ell]$ de pe axa Ox a reperului cartezian $xOu.$

Se notează cu $u(x,t)$ abaterea în punctul $x,$ la momentul $t,$ de la poziţia de echilibru.

Problema care se pune constă în determinarea soluţiei ecuaţiei omogene

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad (x,t)\in[0,\ell]\times[0,\infty), \tag{5.28}$$

care să satisfacă condiţiile la limită

$$\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(\ell,t)=0, \end{cases}\quad \forall\, t\in[0,\infty) \tag{5.29}$$

şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\psi(x), \end{cases}\quad \forall\, x\in[0,\ell]. \tag{5.30}$$

Pentru problema (5.28) – (5.30) se caută soluţii de forma

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t), \tag{5.31}$$

unde $X(x)$ şi $T(t)$ sunt funcţii care urmează să fie determinate astfel încât ecuaţia (5.28) să fie satisfăcută şi condiţiile (5.29) şi (5.30) să fie îndeplinite.

Derivatele parţiale nemixte de ordinul al doilea ale funcţiei u din (5.31) au expresiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)\cdot T(t) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(x)\cdot T''(t). \end{cases} \tag{5.32}$$

Înlocuind (5.31) în (5.28), obţinem relaţia

$$X(x)\cdot T''(t)-a^2X''(x)\cdot T(t)=0,\ \ \forall\,(x,t)\in[0,\ell]\times[0,\infty),$$

care se mai poate scrie în forma

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=k, \tag{5.33}$$

unde k nu poate fi decât o constantă, deoarece trebuie să fie egală cu valoarea unei funcţii numai de $x,$ pe de o parte şi simultan cu valoarea unei funcţii numai de $t,$ pe de altă parte, variabilele x şi t fiind independente între ele.

Egalităţile (5.33) sunt îndeplinite dacă:

$$X''(x)-kX(x)=0; \tag{5.34}$$

$$T''(t)-ka^2T(t)=0. \tag{5.35}$$

Observăm că condiţiile la limită (5.29) sunt echivalente cu relaţiile

$$X(0)=0,\quad X(\ell)=0. \tag{5.36}$$

Relaţia (5.34) constituie o ecuaţie diferenţială ordinară, liniară, de ordinul al doildea, cu coeficienţi constanţi a cărei ecuaţie caracteristică $r^2-k=0$ are rădăcinile $r_1=\sqrt{k}$ şi $r_2=-\sqrt{k}.$

Distingem trei cazuri.

Cazul I, în care presupunem $k>0,$ ceea ce înseamnă că rădăcinile caracteristice sunt reale şi distincte, iar soluţia generală a ecuaţiei (5.34) se scrie sub forma

$$X(x)=c_1e^{x\sqrt{k}}+c_2e^{-x\sqrt{k}} \tag{5.37}$$

căreia impunându–i condiţiile iniţiale (5.36), obţinem sistemul liniar şi omogen

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\ell\sqrt{k}} + c_2 e^{-\ell\sqrt{k}} = 0, \end{cases}$$

pentru determinarea constantelor c_1 şi c_2. Determinantul acestui sistem este nenul, ceea ce arată că singura soluţie este cea banală $c_1 = c_2 = 0$, care nu convine deoarece atrage după sine $X(x) = 0$ şi deci $u(x,t) = 0$. Interpretând acest rezultat ajungem la concluzia că toate punctele coardei rămân tot timpul nemişcate, adică, în acest caz coarda nu ar executa nici un fel de vibraţii, ceea ce contrazice condiţiile iniţiale.

Cazul II, în care presupunem $k = 0$, ceea ce înseamnă că ecuaţia diferenţială (5.34) se reduce la $X''(x) = 0$ care are soluţia generală

$$X(x) = c_1 \cdot x + c_2. \tag{5.38}$$

Impunând soluţiei (5.38) să satisfacă condiţiile iniţiale (5.36) găsim şi de această dată că $c_1 = c_2 = 0$, care conduce la concluzia $X(x) = 0$ şi implicit la soluţia $u(x,t) = 0$, rezultat care contrazice condiţiile iniţiale (5.30), în sensul că acestea nu sunt satisfăcute.

Cazul III: $k < 0$. În acest caz, putem nota $k = -\nu^2$ şi ecuaţia diferenţială (5.34) va avea forma

$$X''(x) + \nu^2 X(x) = 0. \tag{5.39}$$

Ecuaţia caracteristică corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (5.39) este $r^2 + \nu^2 = 0$, iar rădăcinile acesteia sunt $r_1 = i\nu$ şi $r_2 = -i\nu$, ceea ce atrage că

$$X(x) = c_1 \cdot \cos \nu x + c_2 \cdot \sin \nu x \tag{5.40}$$

este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (5.34), în care $k = -\nu^2$. Impunând soluţiei generale (5.40) condiţiile iniţiale (5.36), găsim

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 \cdot \sin \nu\ell = 0. \end{cases}$$

Neputând lua varianta $c_1 = c_2 = 0$ din aceleaşi motive ca mai sus, rămâne să impunem condiţia $\sin \nu\ell = 0$, care conduce la $\nu\ell = n\pi$, unde $n \in I\!N^*$.

Aşadar, valoarea lui ν depinde de n, motiv pentru care pe viitor va fi notată prin ν_n, astfel că

$$\nu_n = \frac{n\pi}{\ell}, \quad n = 1, 2, ...,$$

iar pentru k vom avea valorile

$$k_n = -\Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2, \quad n = 1, 2, ... \cdot \tag{5.41}$$

În concluzie, soluţia ecuaţiei diferenţiale (5.39) care satisface condiţiile la limită (5.36), pe care o vom nota de aici înainte prin $X_n(x)$, este

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad n \in I\!N^*. \tag{5.42}$$

Să ne întoarcem acum la ecuaţia diferenţială (5.35), în care pentru k luăm valorile (5.41), adică la ecuaţiile diferenţiale ordinare, de ordinul al doilea, liniare şi omogene

$$T''(t) + a^2 \Big(\frac{n\pi}{\ell}\Big)^2 T(t) = 0, \quad n \in I\!N^*. \tag{5.43}$$

Pentru fiecare $n \in I\!N^*$, soluţia generală corespunzătoare ecuaţiei (5.35) este

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t, \tag{5.44}$$

unde a_n şi b_n, $n \in I\!N^*$, sunt deocamdată constante reale arbitrare.

Introducând (5.42) şi (5.44) în (5.31) constatăm că

$$u_n(x,t) = \Big(a_n \cos\frac{n\pi a}{\ell}t + b_n \sin\frac{n\pi a}{\ell}t\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad n \in I\!N^* \tag{5.45}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei coardei vibrante de lungime finită (5.28) care satisfac condiţiile la limită (5.29).

Suma tuturor acestor soluţii, în cazul când aceasta există, este de asemeni o soluţie a ecuaţiei (5.28) care satisface condiţiile la limită (5.29). Notând această sumă cu $u(x,t)$, avem că funcţia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi a}{\ell}t + b_n \sin\frac{n\pi a}{\ell}t\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{5.46}$$

unde coeficienţii a_n şi b_n, $n \in I\!N^*$, sunt deocamdată constante reale arbitrare, este soluţie a ecuaţiei (5.28) care satisface condiţiile la limită (5.29).

Seria (5.46) poate fi derivată parţial termen cu termen, iar derivata parţială a funcţiei sumă în raport cu variabila t este

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\pi a}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(-a_n \sin\frac{n\pi a}{\ell}t + b_n \cos\frac{n\pi a}{\ell}t\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x. \tag{5.47}$$

Determinarea acestor coeficienţi va rezulta în urma impunerii condiţiilor iniţiale funcţiei $u(x,t)$, definită ca fiind suma seriei de funcţii trigonometrice (5.46), iar seria cu aceşti coeficienţi astfel determinaţi va defini soluţia problemei la limită cu condiţii iniţiale (5.28) − (5.30).

Impunând soluţiei (5.46) prima condiţie iniţială (5.30) se obţine

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \varphi(x), \tag{5.48}$$

iar dacă folosim (5.46) şi cea de a doua condiţie iniţială din (5.30), deducem

$$\frac{\pi a}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} n b_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \psi(x). \tag{5.49}$$

Din (5.48) şi (5.49) se observă că a_n şi b_n sunt coeficienţii Fourier ai dezvoltării funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ în serii Fourier, mai precis:

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx; \tag{5.50}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx. \tag{5.51}$$

Deci, soluţia ecuaţiei omogene a coardei vibrante de lungime finită (5.28) care satisface condiţiile la limită (5.29) şi condiţiile iniţiale (5.30) este dată de suma seriei trigonometrice (5.46), unde coeficienţii a_n şi b_n sunt daţi de (5.50) şi respectiv (5.51).

Exemplul 5.5.1. *Să se integreze ecuaţia omogenă a coardei vibrante de lungime două unităţi*

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

cu condiţiile la limită

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(2,t) = 0, \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} x, & \textit{dacă} \quad x \in [0,1) \\ 2-x, & \textit{dacă} \quad x \in (1,2], \end{cases} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

Soluţie. Se caută soluţia de forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos \frac{n\pi a}{2} t + b_n \sin \frac{n\pi a}{2} t \Big) \sin \frac{n\pi}{2} x, \tag{5.52}$$

unde

$$a_n = \int_0^2 \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx, \qquad b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^2 \psi(x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx.$$

Funcţia $\psi(x)$ fiind identic nulă pe compactul $[0,2]$, rezultă că $b_n = 0$. Coeficienţii a_n se obţin înlocuind pe $\varphi(x)$ care este egal cu x, dacă $x \in [0,1)$ şi $2-x$, dacă $x \in (1,2]$:

$$a_n = \int_0^1 x \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx + \int_1^2 (2-x) \sin \frac{n\pi}{2} x \, dx = \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2},$$

sau

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad n = 2k, \\ (-1)^k \dfrac{8}{n^2\pi^2}, & \text{dacă} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Înlocuind în (5.52) valorile găsite ale coeficienţiolr a_n şi b_n se obţine soluţia problemei la limită cu condiţii iniţiale, care are expresia

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} a_n \cos \frac{a(2k+1)\pi t}{2} \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x, \;\; x \in [0,2].$$

■

5.6 Integrarea ecuaţiei neomogene a coardei vibrante finite cu condiţii la limită omogene

Coarda de lungime ℓ execută oscilaţii întreţinute sau forţate atunci când nu este lăsată să vibreze liber, asupra sa acţionând o forţă perturbatoare $f(x,t)$, în fiecare punct x al ei şi la orice moment $t \geq 0$, făcând–o să vibreze continuu. Ecuaţia coardei vibrante va fi în acest caz neomogenă şi va avea forma

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in [0,\ell] \times [0,\infty), \tag{5.53}$$

unde $f(x,t)$ este o forţă exterioară dată pe unitatea de masă a coardei şi perpendiculară pe axa Ox.

Intenţionăm să determinăm soluţia ecuaţiei (5.53) care să verifice:

a) condiţiile la limită

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(\ell,t) = 0, \end{cases} \qquad \forall\, t \in [0,T];$$

b) condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} \qquad \forall\, x \in [0,\ell].$$

Datorită liniarităţii ecuaţiei coardei vibrante, încercăm să determinăm $u(x,t)$ ca sumă de două funcţii

$$u(x,t) = u_p(x,t) + \nu(x,t),$$

unde $\nu(x,t)$ să fie soluţia ecuaţiei omogene care să satisfacă aceleaşi condiţii la limită şi aceleaşi condiţii iniţiale ca şi funcţia $u(x,t)$, iar $u_p(x,t)$ să fie soluţia ecuaţiei neomogene a coardei vibrante de lungime finită, cu condiţii la limită şi iniţiale nule. Prin urmare, $u_p(x,t)$, căreia îi vom spune *soluţie particulară*, este soluţia următoarei probleme la limită cu condiţii iniţiale:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}=f(x,t),\quad (x,t)\in[0,\ell]\times[0,\infty);$$

$$\begin{cases} u_p(0,t)=0 \\ u_p(\ell,t)=0, \end{cases}\qquad \forall\, t\in[0,T];$$

$$\begin{cases} u_p(x,0)=0 \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial t}(x,0)=0, \end{cases}\qquad \forall\, x\in[0,\ell].$$

Din rezultatele prezentate anterior, se ştie că

$$\nu(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi a}{\ell}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{\ell}t\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{5.54}$$

unde

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx; \\ b_n=\dfrac{2}{n\pi a}\displaystyle\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx,\quad n\in I\!N^*. \end{cases}$$

Pentru aflarea soluţiei particulare $u_p(x,t)$ se utilizează metoda separării variabilelor, luând

$$u_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \tag{5.55}$$

care verifică condiţiile la limită, deoarece pentru $x=0$ şi $x=\ell$ se anulează fiecare termen al seriei (5.55).

Cunoaşterea lui $u_p(x,t)$ cere însă determinarea şirului de funcţii $T_n(t)$, care se va realiza din condiţia ca $u_p(x,t)$ din (5.55) să verifice ecuaţia neomogenă a coardei vibrante, adică din condiţia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{a^2}T_n''(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x-T_n(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\Big)\Big)=f(x,t). \tag{5.56}$$

În continuare, presupunem că $f(x,t)$ este dezvoltabilă în serie Fourier numai de sinusuri, adică are loc identitatea

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad \forall\, x\in[0,\ell],\quad \forall\, t\in[0,\infty), \tag{5.57}$$

unde

$$b_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx.$$

Înlocuind (5.57) în (5.56), obţinem identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_n''(t)+\Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2T_n(t)\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x=a^2\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad \forall\, x\in[0,\ell],\quad \forall\, t\in[0,\infty). \tag{5.58}$$

Deoarece funcţiile $y_n=\sin\dfrac{n\pi}{\ell}x$ sunt independente funcţional, din (5.58) rezultă

$$T_n''(t)+\Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2T_n(t)=a^2b_n(t),\quad n\in I\!N^*. \tag{5.59}$$

Egalităţile (5.59) reprezintă ecuaţii diferenţiale liniare, neomogene, de ordinul al doilea, cu coeficienţi constanţi.

Ecuaţiile omogene asociate ecuaţiilor (5.59)

$$T_n''(t) + \Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 T_n(t) = 0, \quad n \in I\!N^* \tag{5.60}$$

au ca ecuaţii caracteristice, ecuaţiile de gradul al doilea

$$r^2 + \Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 = 0, \;\; n \in I\!N^*,$$

cu rădăcinile complex conjugate

$$r_1 = i\frac{n\pi a}{\ell}, \quad r_2 = -i\frac{n\pi a}{\ell}, \quad n \in I\!N^*,$$

cărora le corespund sistemele fundamentale de soluţii

$$T_{n1} = \cos\frac{n\pi a}{\ell}t, \quad T_{n2} = \sin\frac{n\pi a}{\ell}t, \quad n \in I\!N^*. \tag{5.61}$$

Folosind soluţiile (5.61), construim soluţiile generale T_{n0} ale ecuaţiilor omogene asociate (5.60)

$$T_{n0}(t) = \alpha_n \cos\frac{n\pi a}{\ell}t + \beta_n \sin\frac{n\pi a}{\ell}t, \quad n \in I\!N^*, \tag{5.62}$$

unde α_n şi β_n sunt constante reale arbitrare.

Soluţiile generale ale ecuaţiilor (5.59) sunt astfel

$$T_n(t) = T_{n0}(t) + c_n(t) = \alpha_n \cos\frac{n\pi a}{\ell}t + \beta_n \sin\frac{n\pi a}{\ell}t + c_n(t), \quad n \in I\!N^*, \tag{5.63}$$

unde $c_n(t), \;\; n \in I\!N^*$, sunt soluţii particulare ale ecuaţiilor neomogene (5.59).

Observaţia 5.6.1. *Integrarea ecuaţiei coardei vibrante de lungime finită s–a făcut cu condiţii la limită omogene.*

5.7 Integrarea ecuaţiei neomogene a coardei vibrante finite cu condiţii la limită neomogene

Considerăm următoarele funcţii

$$\begin{array}{ll} f : [0,\ell]\times[0,T] \to \mathbb{R}, & f \in C^0([0,\ell]\times[0,T]); \\ g, h : [0,T] \to \mathbb{R}, & g, h \in C^2([0,T]); \\ \varphi, \psi : [0,\ell] \to \mathbb{R}, & \varphi, \psi \in C^0([0,\ell]) \end{array}$$

şi problema la limită cu condiţii iniţiale în care se cere determinarea funcţiei

$$u : [0,\ell]\times[0,T] \to \mathbb{R}, \quad u \in C^2([0,\ell]\times[0,T]),$$

ce să satisfacă ecuaţia cu derivate parţiale de tip hiperbolic

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in [0,\ell]\times[0,T], \tag{5.64}$$

condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases} \quad \forall\, x \in [0,\ell] \tag{5.65}$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} u(0,t) = g(t), \\ u(\ell,t) = h(t), \end{cases} \quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{5.66}$$

Următoarea teoremă reduce rezolvarea acestei probleme la limită cu condiţii iniţiale la o problemă de acelaşi tip, dar cu condiţii la limită omogene. În prealabil, introducem următoarele funcţii:

$$\begin{aligned} f^*(x,t) &= f(x,t) - \frac{1}{a^2}\Big(g''(t) + \frac{x}{\ell}(h''(t) - g''(t))\Big); \\ \varphi^*(x) &= \varphi(x) - \Big(g(0) + \frac{x}{\ell}(h(0) - g(0))\Big); \\ \psi^*(x) &= \psi(x) - \Big(g'(0) + \frac{x}{\ell}(h'(0) - g'(0))\Big). \end{aligned} \tag{5.67}$$

Teorema 5.7.1. *Dacă $u^*(x,t)$ este o soluţie a ecuaţiei*

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = f^*(x,t), \quad (x,t) \in [0,\ell] \times [0,T], \tag{5.68}$$

cu condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u^*(x,0) = \varphi^*(x), \\ \dfrac{\partial u^*}{\partial t}(x,0) = \psi^*(x), \end{cases} \quad \forall\, x \in [0,\ell] \tag{5.69}$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} u^*(0,t) = 0, \\ u^*(\ell,t) = 0, \end{cases} \quad \forall\, t \in [0,T], \tag{5.70}$$

atunci

$$u(x,t) = u^*(x,t) + \frac{x}{\ell}(h(t) - g(t)) \tag{5.71}$$

este o soluţie a problemei la limită cu condiţii iniţiale (5.64) – (5.66).

Demonstraţie. Derivatele parţiale de ordinul al doilea, nemixte, ale funcţiei $u(x,t)$ din (5.71) sunt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} + g''(t) + \frac{x}{\ell}(h''(t) - g''(t)). \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2}\Big(g''(t) + \frac{x}{\ell}(h''(t) - g''(t))\Big) = \\ &= f^*(x,t) + \frac{1}{a^2}\Big(g''(t) + \frac{x}{\ell}(h''(t) - g''(t))\Big) = f(x,t), \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că u din (5.71) este soluţie a ecuaţiei (5.64).

Studiem dacă funcţia u din (5.71) satisface condiţiile iniţiale.

Pentru aceasta calculăm $u(x,0)$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)$. Avem:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u^*(x,0) + g(0) + \frac{x}{\ell}(h(0) - g(0)) = \varphi^*(x) + g(0) + \frac{x}{\ell}(h(0) - g(0)) = \varphi(x); \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \frac{\partial u^*}{\partial t} + g'(0) + \frac{x}{\ell}(h'(0) - g'(0)) = \psi^*(x) + g'(0) + \frac{x}{\ell}(h'(0) - g'(0)) = \psi(x), \end{aligned}$$

deci u verifică condiţiile iniţiale (5.65).

În plus, avem:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u^*(0,t) + g(t) + \frac{0}{\ell}(h(t) - g(t)) &= g(t);\\ u(\ell,t) &= u^*(0,t) + g(t) + \frac{\ell}{\ell}(h(t) - g(t)) &= h(t), \end{aligned}$$

ceea ce arată că şi condiţiile la limită (5.66) sunt verificate.

Mai trebuie precizată funcţia $u^*(x,t)$.

Pentru aceasta vom utiliza rezultatele stabilite în secţiunea precedentă unde am integrat ecuaţia neomogenă a coardei vibrante finită cu condiţii la limită omogene.

Se verifică simplu că funcţia $u^*(x,t)$ dată de

$$\begin{aligned} u^*(x,t) &= \int_0^\ell G(x,t,s)\varphi^*(s)ds + \int_0^t \Big(\int_0^\ell G(x,\tau,s)\psi^*(s)ds\Big)d\tau + \\ &+ \int_0^t \Big(\int_0^{t-\tau} \Big(\int_0^\ell G(\xi,\tau,s)f^*(\tau,s)ds\Big)d\tau\Big)d\xi, \end{aligned} \tag{5.72}$$

unde

$$G(x,t,s) = \frac{2}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty} \sin\Big(\frac{k\pi}{\ell}x\Big)\cdot\cos\Big(\frac{ak\pi}{\ell}t\Big)\cdot\sin\Big(\frac{k\pi}{\ell}s\Big) \tag{5.73}$$

este soluţia problemei la limită cu condiţii iniţiale (5.68) – (5.70).

Avâand funcţia $u^*(x,t)$ determinată, rezultă că soluţia problemei la limită cu condiţii iniţiale (5.65) – (5.67) este funcţia $u(x,t)$ din (5.71). **q.e.d.**

Exemplul 5.7.1. *Să se integreze ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t - x,$$

cu condiţiile iniţiale $\begin{cases} u(x,0) = x+1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x \end{cases}$ *şi condiţiile la limită* $\begin{cases} u(0,t) = t, \\ u(2,t) = t+1. \end{cases}$

Soluţie. Constantele şi funcţiile acestei probleme sunt:

$$a = 2; \quad \ell = 2; \quad f(x,t) = t - x; \quad \varphi(x) = x+1; \quad \psi(x) = x; \quad g(t) = t; \quad h(t) = t+1. \tag{5.74}$$

Aplicăm teoria prezentată în această subsecţiune cu datele menţionate în (5.74).

Pentru aceasta trebuiesc calculate toate funcţiile indexate superior cu asterix. Avem

$$\begin{cases} f^*(x,t) &= f(x,t) - \dfrac{1}{4}\Big(g''(t) + \dfrac{x}{2}(h''(t) - g''(t))\Big) = t - x - \dfrac{1}{4}\Big(0 + \dfrac{x}{2}(0-0)\Big) = t - x;\\ \varphi^*(x) &= \varphi(x) - \Big(g(0) + \dfrac{x}{2}(h(0) - g(0))\Big) = x + 1 - \Big(0 + \dfrac{x}{2}(1-0)\Big) = \dfrac{x+2}{2};\\ \psi^*(x) &= \psi(x) - \Big(g'(0) + \dfrac{x}{2}(h'(0) - g'(0))\Big) = x - \Big(1 + \dfrac{x}{2}(1-1)\Big) = x - 1. \end{cases} \tag{5.75}$$

Folosind (5.73), în care se introduc primele două date din (5.74), se determină funcţia $G(x,t,s)$, iar dacă rezultatul găsit se introduce în (5.72), aflăm funcţia $u^*(x,t)$. În final, soluţia problemei la limită cu condiţii iniţiale este dată de

$$u(x,t) = u^*(x,t) + t + \frac{x}{2}.$$

■

5.8 Principiul lui Duhamel pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene a coardei vibrante finite

Teorema 5.8.1. *Dacă pentru fiecare τ fixat, notăm $w(x,t,\tau)$ soluţia ecuaţiei*

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{5.76}$$

care verifică condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} w(x,0,\tau)=0,\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0,\tau)=a^2 f(x,\tau) \end{cases} \tag{5.77}$$

şi condiţiile la limită

$$\begin{cases} w(0,t,\tau)=0,\\ w(\ell,t,\tau)=0, \end{cases} \tag{5.78}$$

unde τ este un parametru, atunci funcţia

$$u_p(x,t)=\int_0^t w(x,t-\tau,\tau)d\tau \tag{5.79}$$

verifică ecuaţia vibraţiilor coardei finite

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{5.80}$$

cu condiţiile iniţiale omogene

$$\begin{cases} u_p(x,0)=0\\ \dfrac{\partial u_p}{\partial t}(x,0)=0 \end{cases} \tag{5.81}$$

şi condiţiile la limită omogene

$$\begin{cases} u_p(0,t)=0,\\ u_p(\ell,t)=0. \end{cases} \tag{5.82}$$

Demonstraţie. Funcţia u_p din (5.79) este o integrală depinzând de doi parametri, x şi t. Conform ipotezelor, rezultă că u_p este de două ori diferenţiabilă, iar derivatele parţiale se determină prin formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de parametru [14][p. 65]. Mai întâi, avem:

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t-\tau,\tau)\,d\tau. \tag{5.83}$$

Apoi,

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)\,d\tau+w(x,0,t). \tag{5.84}$$

Ţinând seama de (5.77), din (5.84) se obţine o nouă integrală care depinde de doi parametri

$$\frac{\partial u_p}{\partial t}(x,t)=\int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)\,d\tau, \tag{5.85}$$

căreia, dacă îi aplicăm formula lui Leibniz, deducem

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}(x,t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t-\tau,\tau)\,d\tau+\frac{\partial w}{\partial t}(x,t,0). \tag{5.86}$$

Având în vedere cea de a doua condiţie iniţială din (5.77), rezultă că (5.86) devine

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}(x,t) \quad = \quad \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t-\tau, \tau)\, d\tau + a^2 f(x,t). \tag{5.87}$$

Impunând ca $u_p(x,t)$ să satisfacă (5.80) şi ţinând cont de (5.83) şi (5.87), ajungem la

$$\frac{1}{a^2}\Big(a^2 f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t-\tau,\tau)\, d\tau\Big) - \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t-\tau,\tau)\, d\tau = f(x,t)$$

sau

$$\int_0^t \Big(\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t-\tau,\tau) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t-\tau,\tau)\Big) d\tau = 0,$$

ceea ce este adevărat deoarece $w(x,t,\tau)$ este soluţia ecuaţiei omogene (5.76).

Din (5.79) şi (5.85) rezultă că ambele condiţii iniţiale (5.81) sunt îndeplinite.

De asemeni, condiţiile la limită (5.82) sunt satisfăcute deoarece funcţia w verifică condiţiile la limită (5.78).

Astfel, teorema este demonstrată. **q.e.d.**

5.9 Ecuaţia de echilibru a unei membrane elastice

Se numeşte *membrană elastică* o foaie întinsă, perfect flexibilă şi care opune rezistenţă la întindere. Lucrul mecanic efectuat de către o forţă externă, pentru a deforma un sector al membranei, este proporţional cu deformarea. Coeficientul de proporţionalitate T, indiferent de forma şi poziţia acestui sector, se numeşte *tensiunea membranei*.

Vom deduce ecuaţia pe care trebuie să o verifice o membrană aflată în echilibru, presupunând că la momentul iniţial ea ocupă în planul xOy un domeniu D, mărginit de o curbă L, suficient de regulată. Forţele elastice interne produc un lucru mecanic egal şi de semn contrar cu cel datorat forţelor externe. Fie $f(M)$ densitatea, într–un punct $M \in D$, a forţei perpendiculare pe planul xOy. Sub acţiunea acestei forţe, membrana trece într–o nouă stare, descrisă de ecuaţia $u = u(M)$, sau $u = u(x,y)$, unde x şi y sunt coordonatele carteziene ale punctului M. Presupunem că deformarea membranei este mică, ceea ce înseamnă că vom neglija puterile superioare lui 2 ale derivatelor parţiale $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Presupunem în plus că, sub acţiunea forţelor externe, punctele membranei nu se deplasează decât pe perpendiculara la planul xOy astfel încât coordonatele x, y ale unui punct arbitrar nu se modifică.

Lucrul mecanic al forţei externe $f(x,y)$, care a produs deplasarea membranei din poziţia sa iniţială $(u = 0,\ M(x,y) \in D)$, în poziţia descrisă de ecuaţia $u = u(x,y),\ M(x,y) \in D$, este egal cu

$$\iint\limits_D f(x,y)u(x,y)dxdy.$$

În decursul deplasării, variaţia ariei membranei este

$$\iint\limits_D \Big(\sqrt{1 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big)^2} - 1\Big)\, dxdy,$$

iar lucrul mecanic al forţelor elastice interne este egal cu

$$-T\iint\limits_D \Big(\sqrt{1 + \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big)^2} - 1\Big)\, dxdy \approx \frac{-T}{2}\iint\limits_D \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big)^2 dxdy.$$

Prin urmare, lucrul mecanic total se scrie

$$A(u) = \iint\limits_D \Big(\frac{-T}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big)^2 + f(x,y)u(x,y)\Big)\, dxdy. \tag{5.88}$$

Variaţia funcţionalei (5.88) se exprimă prin

$$\delta A(u) \iint\limits_{D} (-T(u_x \delta u_x + u_y \delta u_y) + f \delta u)\, dxdy,$$

unde, pentru comoditatea scrierii, am notat derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei u cu u_x, respectiv u_y.

Conform principiului deplasărilor virtuale, în poziţia de echilibru $u = u(x, y)$ are loc relaţia $\delta A(u) = 0$, pentru toate variabilele admisibile $\delta u(x, y)$. Utilizând prima identitate a lui Green (3.86), sau [15][p.137], avem

$$\iint\limits_{D} (u_x \delta u_x + u_y \delta u_y) + f \delta u)\, dxdy = \int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta u\, ds - \iint\limits_{D} \nabla^2 u\, \delta u\, dxdy,$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei exterioare la conturul L şi $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ este derivata câmpului scalar u pe direcţia versorului $\mathbf{n}$ (vezi (3.13)), obţinem

$$\delta A(u) = -T \int_L \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \delta u\, ds + \iint\limits_{D} (T \nabla^2 u + f) \delta u\, dxdy = 0. \tag{5.89}$$

Deoarece orice funcţie indefinit diferenţiabilă în D şi egală cu zero pe frontieră este o funcţie admisibilă, presupunând că $u(x, y)$ şi $f(x, y)$ sunt suficient de regulate, egalitatea (5.89) implică

$$T \nabla^2 u = -f(x, y), \quad \forall\, M(x, y) \in D, \tag{5.90}$$

unde ∇^2 este *operatorul lui Laplace în două dimensiuni*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip eliptic (5.90) este denumită *ecuaţia de echilibru* a membranei elastice.

În continuare vom stabili condiţiile la limită.

a) Dacă marginea membranei este *fixată rigid*, nu se produce nici o deplasare a punctelor de pe conturul L şi prin urmare

$$u(x, y) = 0, \quad \forall\, M(x, y) \in L. \tag{5.91}$$

b) Dacă marginea membranei este *liberă* ea se poate deplasa liber pe suprafaţa laterală a cilindrului cu generatoarele perpendiculare pe planul xOy şi curba directoare conturul L. În acest caz, δu este arbitrară în D şi pe L, iar condiţia (5.89) implică

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) = 0, \quad \forall\, M(x, y) \in L. \tag{5.92}$$

c) Dacă marginea membranei este *supusă unei forţe* cu densitatea liniară f_1, integrala curbilinie din (5.89) se înlocuieşte cu

$$\int_L \Big(-T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + f_1 \Big) \delta u\, ds,$$

iar δu fiind arbitrară de–a lungul lui L, rezultă

$$-T \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, y) + f_1(x, y) = 0, \; \forall\, M(x, y) \in L. \tag{5.93}$$

d) Dacă marginea membranei este *fixată elastic*, cu o forţă $-ku$, unde k exprimă rigiditatea legăturii, condiţia la limită se obţine înlocuind cu $= ku$ pe f_1 în ecuaţia (5.93). Astfel rezultă condiţia

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,y) + hu(x,y) = 0,\ \forall\, M(x,y) \in L, \tag{5.94}$$

unde $h = \dfrac{k}{T}$.

5.10 Ecuaţia de mişcare a unei membranei elastice

Vom stabili acum *ecuaţia de mişcare a unei membranei elastice*.

În acest scop, fie $u = u(x,y,t)$ funcţia care descrie poziţia membranei la momentul t. Conform principiului lui d'Alembert, funcţia $u(x,y,t)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$T\nabla^2 u = -\Big(f(x,y,t) - \rho(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t)\Big),$$

unde $f = f(x,y,t)$ este *densitatea forţei externe*, iar $\rho(x,y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t)$ este *densitatea forţei de inerţie*.

Aşadar, *ecuaţia de mişcare a unei membrane elastice* are forma

$$a^2\nabla^2 u - u_{tt} = F(x,y,t), \quad \text{unde} \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad F(x,y,t) = -\frac{f(x,y,t)}{\rho(x,y)}, \tag{5.95}$$

unde pentru derivata parţială secundă în raport cu timpul t am utilizat notaţia mai simplă $\dfrac{\partial u^2}{\partial t^2} = u_{tt}$.

Din punct de vedere fizic, este clar că, pentru a descrie oscilaţiile în mod univoc, trebuie ca în afara ecuaţiei (5.95) şi a condiţiei la limită (una, oricare, din condiţiile **a)**–**d)**), să se precizeze *poziţia iniţială* (forma membranei) la momentul iniţial $t = 0$ şi *vitezele iniţiale* ale punctelor membranei.

Se formulează aşadar, pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic (5.95), următoarea problemă la limită cu condiţii iniţiale: să se afle o funcţie $u : D \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, de două ori diferenţiabilă în D pentru $t \geq 0$, soluţie a ecuaţiei vibraţiilor libere ale membranei elastice, care să verifice una din cele cinci condiţii la limită **a)**–**d)**, în care (x,y) trece în (x,y,t), şi să satisfacă de asemenea condiţiile iniţiale

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \psi(x,y), \quad \forall\, M(x,y) \in D,$$

unde φ şi ψ sunt funcţii date.

5.11 Oscilaţiile libere ale unei membrane elastice circulare

Scopul acestui paragraf este acela de a găsi oscilaţiile libere ale unei membrane elastice circulare de rază R cu condiţii la limită şi iniţiale date. Pentru simplitate, considerăm că data la limită este nulă. Deci, problema constă în găsirea funcţiei $u(r,\theta,t)$, care ţine loc de înălţimea membranei faţă de planul în care s–a ales reperul polar (r,θ), care satisface ecuaţia oscilaţiilor libere ale membranei scrisă în coordonate polare [9]

$$u_{tt} = a^2\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\Big), \quad (r,\theta) \in (0,R) \times [0,2\pi), \tag{5.96}$$

condiţia la limită nulă

$$u(R,\theta,t) = 0 \tag{5.97}$$

şi condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u(r,\theta,0) = f(r,\theta), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta), \end{cases} \tag{5.98}$$

unde f şi g sunt funcţii date.

Pentru a rezolva problema la limită cu condiţii iniţiale (5.96) – (5.98), reamintim problema vibraţiilor libere ale coardei care a implicat *superpoziţia* unui număr infinit de oscilaţii simple.

Dacă abordăm membrana într–un mod similar, vom căuta soluţii de forma

$$u(r,\theta,t) = U(r,\theta)\cdot T(t). \tag{5.99}$$

Expresia (5.99) dă forma $U(r,\theta)$ a oscilaţiillor înmulţite cu *factorul oscilator* $T(t)$. Procedând la înlocuire în ecuaţia cu derivate parţiale ale oscilaţiilor libere ale membranei, ajungem la ecuaţiile

$$\nabla^2 U + \lambda^2 U = 0 \quad \text{(ecuaţie de tip Helmholtz)}, \tag{5.100}$$

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0 \quad \text{(mişcare armonică simplă)}, \tag{5.101}$$

unde

$$\nabla^2 U = U_{rr} + \frac{1}{r^2}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}$$

este *operatorul lui Laplace în coordonate polare în plan*, aplicat funcţiei $U = U(r,\theta)$.

Din sensul fizic al problemei rezultă că funcţia $U = U(r,\theta)$ este o funcţie periodică de θ, cu perioada 2π, adică

$$U(r,\theta) = U(r,\theta+2\pi) \tag{5.102}$$

şi că această funcţie este mărginită în centrul discului, adică

$$|U(0,\theta)| < \infty. \tag{5.103}$$

Să remarcăm că de la început am presupus constanta de separare să fie negativă (deci, am notat–o cu $-\lambda^2$) deoarece dorim ca $T(t)$ să fie funcţie periodică.

În următoarea etapă, dorim să rezolvăm ecuaţia Helmholtz, însă, mai întâi, este necesară condiţia la limită. Pentru a afla aceasta, înlocuim (5.99) în condiţia la limită (5.97), din care deducem

$$u(R,\theta,t) = U(R,\theta)\cdot T(t) = 0, \quad 0 < t < \infty$$

sau

$$U(R,\theta) = 0. \tag{5.104}$$

Folosind pentru problema (5.100), (5.102), (5.103), (5.104) metoda separării variabilelor, avem

$$U(r,\theta) = \Phi(r)\cdot Z(r) \tag{5.105}$$

şi din (5.100) obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases} \Phi''(\theta) + \nu^2\Phi(\theta) = 0, \\ Z''(r) + \dfrac{1}{r}Z'(r) + \Big(\lambda^2 - \dfrac{\nu^2}{r^2}\Big)Z(r) = 0. \end{cases} \tag{5.106}$$

În baza relaţiilor (5.103) şi (5.104), trebuie să fie îndeplinite condiţiile

$$\begin{cases} Z(R) = 0, \\ |Z(0)| < \infty. \end{cases} \tag{5.107}$$

Din (5.102) şi $(5.106)_1$ obţinem $\nu = n$, unde n este un număr natural, şi

$$\Phi_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta. \tag{5.108}$$

Efectuând substituţia $\lambda r = x$ în ecuaţia $(5.106)_2$, necunoscuta devine funcţie de variabila x, pe care o notăm cu $y(x)$. Dacă în egalitatea $Z(r) = y(x)$ derivăm în raport cu r de două ori şi ţinem cont că $\dfrac{dx}{dr} = \lambda$, găsim:

$$\begin{cases} Z'(r) \;=\; \dfrac{d}{dr}y(x) = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dr} = y'(x)\cdot\lambda = \lambda\cdot y'(x); \\ Z''(r) \;=\; \dfrac{d}{dr}Z'(r) = \dfrac{d}{dr}(\lambda y'(x)) = \dfrac{d}{dx}(\lambda y'(x))\cdot\dfrac{dx}{dr} = \lambda y''(x)\cdot\lambda = \lambda^2\cdot y''(x). \end{cases}$$

Aşadar,

$$\begin{cases} Z(r) = y(x), \\ Z'(r) = \lambda y'(x), \\ Z''(r) = \lambda^2 y''(x). \end{cases} \tag{5.109}$$

Dacă folosim (5.109) în ecuaţia diferenţială $(5.106)_2$, aceasta devine

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{5.110}$$

în care recunoaştem *ecuaţia diferenţială a lui Bessel* [24].

Se ştie că soluţia generală a ecuaţiei (5.110) este de forma

$$y_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x),$$

unde $J_\nu(x)$ şi $Y_\nu(x)$ sunt funcţiile lui Bessel de ordinul ν, de speţa I şi II respectiv [21], [24][Cap. 3].

Revenind la ecuaţia $(5.106)_2$, constatăm că soluţia sa generală, în cazul $\nu = n$, este

$$Z_n(r) = c_n J_n(\lambda r) + d_n Y_n(\lambda r).$$

Deoarece în vecinătatea punctului $x = 0$, funcţia $J_n(x)$ este mărginită, iar funcţia $Y_n(x)$ ete nemărginită, în baza relaţiei $(5.107)_2$ rezultă că $d_n = 0$. Deci, soluţia generală a ecuaţiei Bessel $(5.106)_2$ este

$$Z_n(r) = c_n J_n(\lambda r). \tag{5.111}$$

Din condiţia (5.104), obţinem $J_n(\lambda R) = 0$. Punând $\lambda R = \mu$, obţinem ecuaţia $J_n(\mu) = 0$. Fie k_{n1}, $k_{n2}, ...,$ soluţiile ei pozitive, adică

$$J_n(k_{nm}) = 0, \quad m = 1, 2, ...\cdot \tag{5.112}$$

Atunci, din (5.111) obţinem că funcţiile

$$Z_{n,m}(r) = J_n\Big(\frac{k_{nm}}{R} r\Big) \tag{5.113}$$

sunt soluţiile problemei $(5.106)_2$ şi (5.107).

Din relaţiile (5.99), (5.101), (5.105), (5.108), (5.113) rezultă că funcţiile

$$\begin{aligned} u_{nm}(r,\theta,t) &= \Big(\Big(A_{nm}\cos\frac{ak_{nm}}{R}t + B_{nm}\sin\frac{ak_{nm}}{R}t\Big)\cos n\theta + \\ &+ \Big(C_{nm}\cos\frac{ak_{nm}}{R}t + D_{nm}\sin\frac{ak_{nm}}{R}t\Big)\sin n\theta\Big) J_n\Big(\frac{k_{nm}}{R}r\Big) \end{aligned} \tag{5.114}$$

sunt soluţiile particulare ale ecuaţiei (5.96), denumite *oscilaţii fundamentale.* Aceste soluţii satisfac condiţia la limită (5.97).

Căutăm soluţia problemei la limită cu condiţii iniţiale (5.96) − (5.98) sub forma seriei de funcţii

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(r,\theta,t), \tag{5.115}$$

unde funcţiile u_{nm} sunt definite prin formulele (5.114). Calculând derivata funcţiei u şi impunând condiţiile iniţiale (5.98), obţinem

$$\begin{cases} f(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\Big(A_{nm}\cos n\theta + C_{nm}\sin n\theta\Big) J_n\Big(\frac{k_{nm}}{R}r\Big), \\ g(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{ak_{nm}}{R}\Big(B_{nm}\cos n\theta + D_{nm}\sin n\theta\Big) J_n\Big(\frac{k_{nm}}{R}r\Big). \end{cases} \tag{5.116}$$

Dezvoltând funcţia $f(r,\theta)$ ca funcţie periodică de θ în serie Fourier

$$f(r,\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(r)\cos n\theta+\beta_n(r)\sin n\theta,$$

unde

$$\begin{cases}\alpha_n(r)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\cos n\theta\,d\theta, & n\in I\!N,\\[2mm] \beta_n(r)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(r,\theta)\sin n\theta\,d\theta, & n\in I\!N^*\end{cases}\tag{5.117}$$

şi comparând această dezvoltare cu formula (5.116), rezultă

$$\begin{cases}\alpha_0(r)=2\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}J_0\Big(\frac{k_{0m}}{R}r\Big)\\ \alpha_n(r)=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\Big(\frac{k_{nm}}{R}r\Big)\\ \beta_n(r)=\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\Big(\frac{k_{nm}}{R}r\Big).\end{cases}\tag{5.118}$$

Pe de altă parte, pentru fiecare $n\in I\!N$ fixat, şirul de funcţii $\Big(J_n(k_{nm}x)\Big)_{m\geq 1}$, unde k_{nm} sunt rădăcini ale ecuaţiei $J_n(x)=0$, este un *şir ortogonal* cu *ponderea* x pe intervalul $[0,1]$, adică

$$\int_0^1 xJ_n(k_{np}x)J_n(k_{nq}x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{pentru}\quad q\neq p\\ \dfrac{1}{2}J^2_{n+1}(k_{np}), & \text{pentru}\quad q=p.\end{cases}\tag{5.119}$$

Să notăm generic prin $w(r)$, oricare din funcţiile membrilor întâi din (5.118). Această funcţie poate fi dezvoltată în *serie Fourier–Bessel*

$$w(r)=\sum_{s=1}^{\infty}a_sJ_n\Big(\frac{k_{ns}}{R}r\Big),\tag{5.120}$$

coeficienţii dezvoltării determinându–se prin formula

$$a_s=\frac{2}{R^2J^2_{n+1}(k_{ns})}\int_0^R\tau w(\tau)J_n\Big(\frac{k_{ns}}{R}\tau\Big)\,d\tau.\tag{5.121}$$

În continuare vom arăta cum se determină coeficienţii C_{nm}. Folosind rezultatele din (5.119) – (5.121), ultima relaţie din (5.118) devine

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2}{R^2J^2_{n+1}(k_{ns})}\int_0^R\tau\beta_n(\tau)J_n\Big(\frac{k_{ns}}{R}\tau\Big)\,d\tau\,J_n\Big(\frac{k_{ns}}{R}r\Big)=\sum_{q=1}^{\infty}C_{np}J_n\Big(\frac{k_{nq}}{R}r\Big),\quad n\in I\!N.\tag{5.122}$$

Înmulţim egalitatea (5.122) cu $rJ_n\Big(\dfrac{k_{np}}{R}r\Big)$ după care integrăm între 0 şi R. În urma acestor operaţiuni, folosind relaţia (5.119), obţinem

$$C_{np}=\frac{2}{R^2J^2_{n+1}(k_{np})}\int_0^R\tau\beta_n(\tau)J_n\Big(\frac{k_{np}}{R}\tau\Big)\,d\tau.$$

Coeficienţii A_{nm} se determină asemănător.

Pentru a determina coeficienţii B_{nm} şi D_{nm} plecăm de la dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $g(r,\theta)$ şi se urmăreşte raţionamentul de mai sus, derulat după egalităţile (5.116).

În aceest mod, problema la limită cu condiţii iniţiale este complet rezolvată.

Să încercăm să determinăm soluţia problemei (5.96), (5.97), (5.98) într–un caz particular [18][p. 238] şi anume când funcţia u este independentă de variabila θ, situaţie frecvent întâlnită cunoscută sub numele de *problemă axial–simetrică*. Aceasta presupune ca în locul condiţiilor (5.98) trebuiesc considerate condiţiile

$$\begin{cases} u(r,\theta,0) = f(r) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = 0, \end{cases} \tag{5.123}$$

cu menţiunea că nu este nici o dificultate să considerăm şi cazul în care $\dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) \neq 0$. Cu aceste presupuneri, soluţia problemei corespunzătoare devine

$$u(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m} r) \cos k_{0m} a t, \tag{5.124}$$

scopul fiind acela de a găsi A_m astfel încât

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m} r). \tag{5.125}$$

Pentru a găsi constantele A_m, folosim condiţia de ortogonalitate (5.119) în care considerăm că $n = 0$, adică

$$\int_0^1 r J_0(k_{0m} r) J_0(k_{0q} r)\, dr = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad m \neq q \\ \dfrac{1}{2} J_1^2(k_{0q}), & \text{pentru} \quad m = q. \end{cases} \tag{5.126}$$

Calculul acestei integrale poate fi găsit în multe cărţi despre funcţii Bessel. De exemplu, [21] este una din cele mai bune cărţi de tabele, în care sunt tabelate rădăcinile funcţiilor Bessel.

Multiplicând fiecare membru al ecuaţiei (5.125) cu $r J_0(k_{0q} r)$, integrând de la 0 la 1 şi folosind (5.126), obţinem

$$A_q \int_0^1 r J_0^2(k_{0q} r)\, dr = \int_0^1 r f(r) J_0(k_{0q} r)\, dr$$

din care putem determina pentru A_q valoarea

$$A_q = 2 \int_0^1 r f(r) J_0(k_{0q} r)\, dr / J_1^2(k_{0q}), \quad q = 1, 2, ... \tag{5.127}$$

Oscilaţiie membranei circulare de rază $R = 1$, independente de unghiul polar θ, sunt descrise de funcţia $u(r,t)$ din (5.124), unde coeficienţii sunt daţi de relaţiile (5.127).

Această soluţie nu este aşa de complicată cum pare la prima vedere. O putem interpreta ca fiind dezvoltarea *condiţiei iniţiale* $f(r)$ exprimată prin suma

$$f(r) = A_1 J_0(k_{01} r) + A_2 J_0(k_{02} r) + A_3 J_0(k_{03} r) + ...$$

urmată de inserarea *factorului oscilant* $\cos(k_{0m} a t)$ în fiecare termen; adică

$$u(r,t) = A_1 J_0(k_{01} r) \cos(k_{01} a t) + A_2 J_0(k_{02} r) \cos(k_{02} a t) + A_3 J_0(k_{03} r) \cos(k_{03} a t) + ...$$

De exemplu, oscilaţiile membranei circulare, de rază $R = 1$, cu condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} u(r,\theta,0) = J_0(2.4 r) + 0.5 J_0(8.65 r), \\ u_t(r,\theta,0) = 0 \end{cases}$$

trebuie să fie date de

$$u(r,t) = J_0(2.4 r) \cos(2.4 a t) + 0.5 J_0(8.65 r) \cos(8.65 a t).$$

Capitolul 6

Probleme de tip difuzie (Ecuaţii de tip parabolic)

6.1 Ecuaţia diferenţială a propagării căldurii

În situaţiile în care într–o anumită regiune din spaţiu temperatura nu este constantă, se produce fenomenul deplasării unui *flux de căldură* de la punctele cu temperatură mai înaltă la puncte de temperaturi scăzute, fenomen care poartă numele de *propagarea căldurii*.

După cum vom vedea în continuare, modelarea matematică a acestui fenomen se realizează printr–o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip parabolic. Ecuaţia corespunzătoare se stabileşte plecând de la *legea lui Fourier*. Conform acestei legi, cantitatea de căldură Q care trece în intervalul de timp δt prin aria infinitezimală sau *elementul de arie* δS, interioară corpului considerat, este dată de formula

$$Q = -k(\mathbf{x}, u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)\delta S \delta t, \tag{6.1}$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei la suprafaţă în sensul temperaturilor descrescătoare, $k(\mathbf{x}, u)$ este *coeficientul conductibilităţii termice*, iar $u(\mathbf{x}, t)$ este *temperatura* corpului în punctul de vector de poziţie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ la momentul t. Presupunem corpul *izotrop* din punct de vedere al proprietăţilor termice, prin urmare, $k(\mathbf{x}, u)$ nu depinde de orientarea ariei. Pentru a stabili ecuaţia, izolăm în interiorul corpului paralelipipedul [9]

$$\Pi = \{M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,|\,x_j < \xi_j < x_j + \delta x_j,\ j = 1, 2, 3\},$$

cu feţele paralele cu planele de coordonate, şi să determinăm bilanţul său termicc. Pe baza legii lui Fourier (6.1), paralelipipedul Π, prin faţa $\xi_1 = x_1$, primeşte sau cedează cantitatea de căldură

$$Q' = -k(\mathbf{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x}, t)\delta x_2 \delta x_3 \delta t,$$

în timp ce prin faţa opusă $\xi_1 = x_1 + \delta x_1$, cantitatea de căldură cedată sau primită este

$$Q'' = k\Big(x_1 + \delta x_1, x_2, x_3, u(x_1 + \delta x_1, x_2, x_3, t)\Big)\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1 + \delta x_1, x_2, x_3, t)\delta x_2 \delta x_3 \delta t.$$

Bilanţul termic prin cele două feţe opuse va fi suma celor două cantităţi de căldură. Dacă aplicăm lema fundamentală a calculului diferenţial [13], până la infiniţi mici de ordin superior în raport cu δx_1, δx_2, δx_3, δt, cantitatea totală de căldură $Q' + Q''$ are expresia

$$Q' + Q'' = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(k(\mathbf{x}, u)\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big)(\mathbf{x}, t)\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t.$$

În mod analog se calculează fluxul de căldură care se produce prin celelalte feţe. Astfel, cantitatea de căldură $\delta Q,$ care străbate suprafaţa paralelipipedului Π în timpul $\delta t,$ este

$$\delta Q = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(k(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t = \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}u).$$

Presupunem că schimbul termic se produce de prezenţa unor surse de căldură a căror densitate convenim să o notăm cu $F(x,t).$ Cantitatea de căldură pe care sursele o cedează paralelipipedului Π în timpul δt este

$$\delta Q_1 = F(\mathbf{x},t)\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t. \tag{6.2}$$

Astfel, în timpul δt corpul primeşte în total cantitatea de căldură

$$\delta Q_2 = \delta Q + \delta Q_1. \tag{6.3}$$

Pe de altă parte, cantitatea de căldură Q_2 poate fi definită în funcţie de creşterea temperaturii în paralelipipedul Π în intervalul de timp $\delta t,$ în următorul mod: dacă $\rho(\mathbf{x})$ este densitatea materialului din care este confecţionat paralelipipedul şi $c(\mathbf{x})$ este căldura sa specifică, atunci

$$\delta Q_2 = \Big(u(\mathbf{x},t+\delta t) - u(\mathbf{x},t)\Big)\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3. \tag{6.4}$$

Aplicând iarăşi lema fundamentală a calculului infinitezimal, din (6.4) obţinem

$$\delta Q_2 = \rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t)\delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta t. \tag{6.5}$$

Egalăm (6.3) cu (6.5) şi înlocuim δQ şi $\delta Q_1.$ Obţinem

$$\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(k\boldsymbol{\nabla}u) + F(\mathbf{x},t). \tag{6.6}$$

Dacă coeficientul conductivităţii termice k depinde efectiv de temperatura $u,$ atunci (6.6) este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea, neliniară. Dacă însă k nu depinde de $u,$ adică $k(\mathbf{x},u) = k(\mathbf{x}),$ atunci (6.6) devine liniară. În cazul unui *corp omogen*, avem

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const.},\quad c(\mathbf{x}) = \text{const.},\quad k(\mathbf{x}) = \text{const.}$$

şi ecuaţia (6.6) se scrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) = a^2(\nabla^2 u)(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t), \tag{6.7}$$

unde

$$a^2 = \frac{k}{\rho c},\quad f(\mathbf{x},t) = \frac{F(\mathbf{x},t)}{\rho c}.$$

Ecuaţiile (6.6) sau (6.7) se numesc *ecuaţii de propagare a căldurii*.

Dacă $f(\mathbf{x},t) = 0,$ în domeniul tridimensional ocupat de corp are loc fenomenul de răcire al materialului din care este confecţionat corpul, până la o uniformizare a temperaturii la valoare constantă, dacă domeniul ocupat de corp este izolat termic de exteriorul său. În acest caz, fenomenul de răcire este descris de ecuaţia

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x},t) = a^2(\nabla^2 u)(\mathbf{x},t). \tag{6.8}$$

Termenul $a^2(\nabla^2 u)(\mathbf{x},t)$ poartă numele de *difuzie*, iar problemele fizice în care este implicată ecuaţia (6.6) sau (6.7) se numesc *probleme de tip difuzie*. Coeficientul a^2 se numeşte *difuzivitatea termică* a mediului prin care are loc propagarea căldurii.

În general, difuzia poate fi definită ca mişcarea particolelor dintr–un domeniu de concentraţie mare spre o regiune cu concentraţie mai scăzută.

Difuzia apare ca un rezultat al legii a doua a termodinamicii care afirmă că *entropia* sau *dezordinea* oricărui sistem trebuie să crească în timp întotdeauna.

Difuzia este importantă în multe fenomene ale vieţii fiind de mare interes datorită diverselor aplicaţii din geofizică şi industrie. În acest sens menţionăm de exemplu faptul că companiile petrolifere sunt interesate în procesul *difuziei termoelastice* pentru o extracţie mai eficientă a ţiţeiului din depozitele subterane.

Difuzia termoelastică într–un solid elastic se datorează cuplării câmpului termic, difuziei masei, din care este alcătuit corpul, şi *deformarea solidului*, presupusă a fi elastică.

Cel care a avut preocupări majore în teoria difuziei în *termoelasticitate* a fost renumitul matematician polonez Witold Nowacki care a dezvoltat modelul matematic al *termoelasticităţii cuplate*, care implică printre altele viteze infinite ale *propagării undelor elastice*.

De cele mai multe ori, în cărţile sau articolele în care se studiază aspecte ale propagării căldurii din punct de vedere ingineresc, pentru coordonatele carteziene x_1, x_2, x_3 se foloseşte notaţia $x, y, z,$ astfel că ecuaţia (6.7) se scrie în forma

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

6.1.1 Condiţie iniţială

Toate problemele fizice care se petrec într–un corp C trebuie să pornească de la o anumită valoare a timpului, notată în general $t = 0,$ astfel că, pentru descrierea univocă a propagării căldurii în corpul $C,$ în afara ecuaţiei (6.6) sau (6.7), trebuie specificată temperatura la acest moment în toate punctele corpului, numită *temperatură iniţială*, adică

$$u(\mathbf{x}, 0) = \varphi(\mathbf{x}), \tag{6.9}$$

unde φ este o funcţie reală dată definită în toate punctele corpului, deci $\varphi : C \to \mathbb{R}.$

În studiul ecuaţiei propagării căldurii, egalitatea (6.9) poartă denumirea de *condiţie iniţială.*

6.1.2 Condiţii pe frontieră sau condiţii la limită

Toate problemele fizice au frontiere de un anumit tip, astfel că trebuie să descriem matematic ce se petrece pe acea frontieră pentru a caracteriza în mod adecvat problema fizică considerată, cu alte cuvinte trebuie să descriem *regimul termic pe frontieră*, sau *condiţia la limită*.

În cazul unei frontiere S a corpului $C,$ *menţinută la o temperatură* dată, condiţia la limită se scrie

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, t), \quad \forall\, \mathbf{x} \in S, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{6.10}$$

unde ψ este o funcţie reală dată, definită în punctele frontierei corpului, la orice moment $t \geq 0$ al studiului fenomenului termic.

Dacă prin frontiera S trece un *flux de căldură* $q,$ condiţia la limită se scrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad \forall\, \mathbf{x} \in S, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{6.11}$$

unde $h = \dfrac{q}{\alpha},$ α fiind coeficientul de schimb la suprafaţă, iar $\mathbf{n}$ este normala unitară exterioară în punctul $\mathbf{x} \in S.$ În particular, dacă C este un *corp izolat termic* pe frontiera $S,$ atunci $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_S = 0.$ Dacă temperatura mediului ambiant este dată, se presupune că schimburile de căldură au loc conform legii lui Newton, adică $q|_S = \alpha(u_1 - u)|_S,$ unde q este fluxul termic, α este coeficientul de schimb la suprafaţă, iar u_1 este temperatura mediului ambiant. Pe de altă parte, în baza legii lui Fourier, corpul primeşte în unitatea de timp, prin unitatea de arie a lui $S,$ fluxul $q_1 = k\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}.$ Cele două fluxuri trebuie să fie egale, adică $k\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \alpha(u_1 - u)|_S$ sau

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \kappa u\Big)(\mathbf{x}, t) = \varphi_1(\mathbf{x}, t), \quad \forall\, \mathbf{x} \in S, \quad \forall\, t \geq 0, \tag{6.12}$$

unde $\kappa = \dfrac{\alpha}{k}$ şi $\varphi_1 = h\, u_1.$

Condiţiile la limită sunt restricţii impuse pe frontierele domeniului de analiză. Aceste restricţii pot fi de două tipuri:

1. condiţii la limită de tip Dirichlet[1] (numite şi *condiţii esenţiale*), în care se impun valorile variabilei dependente pe frontiera specificată (vezi (6.10));

2. condiţii la limită de tip Neumann[2] (numite şi *naturale*), în care se impune gradientul variabilei dependente în direcţie normală pe frontiera specificată (vezi (6.11)).

Dacă pe frontiera specificată se impun atât condiţii Dirichlet, cât şi Neumann, se vorbeşte de *condiţii de tip Cauchy*.

Dacă pe frontiera specificată se impun combinaţii liniare de condiţii Dirichlet şi Neumann se vorbeşte despre *condiţii de tip Robin*.

Dacă pe diferite părţi ale frontierei domeniului se impun condiţii la limită de tipuri diferite se spune că este vorba despre *condiţii mixte*.

6.2 Alte ecuaţii de tip difuzie

6.2.1 Căldura superficială pierdută, proporţională cu diferenţa de temperatură

Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip parabolic

$$u_t = a^2\nabla^2 u - \beta(u - u_1), \quad \beta > 0, \tag{6.13}$$

descrie fluxul de căldură printr–un corp datorat atât fenomenului de difuzie, cuantificat prin termenul $a^2\nabla^2 u$, cât şi pierderii sau câştigării căldurii prin suprafaţa corpului. Căldura pierdută $(u < u_1)$ sau câştigată $(u > u_1)$ este proporţională cu diferenţa între temperatura $u(\mathbf{x}, t)$ a corpului şi temperatura mediului înconjurător u_1, cu β constanta de proporţionalitate. Dacă β este foarte mare în contrast cu coeficientul de difuzivitate a^2, atunci fluxul de căldură din interiorul corpului, de tip *încoace şi încolo*, prin suprafaţa corpului, va fi mai mic în comparaţie cu fluxul de tip *înspre şi dinspre* suprafaţă şi deci, fluxul va fi drenat spre exterior în conformitate cu ecuaţia

$$u_t = -\beta(u - u_1).$$

În chimie, unde u semnifică *concentraţia unei substanţe*, ecuaţia (6.13) afirmă că viteza de schimbare (variaţie) a substanţei, adică u_t, se datorează atât difuziei $a^2\nabla^2 u$, cât şi faptului că substanţa poate fi *creată* $(u < u_1)$ sau *distrusă* $(u > u_1)$ printr–o reacţie chimică proporţional cu diferenţa dintre concentraţiile u şi u_1.

6.2.2 Ecuaţia difuzie–convecţie a poluării apelor subterane

Poluarea apelor subterane este un fenomen complex, care depinde atât de natura mediului poros cât şi de natura poluanţilor. În general, poluarea apelor subterane are un aspect fizic şi unul chimic sau biochimic.

În continuare, definim noţiunea de *poluare* a apelor subterane în legătură cu dispersia unui poluant într-un mediu poros, şi apoi descriem matematic legăturile dintre *concentraţia poluantului* şi celelalte mărimi caracteristice.

Când două fluide miscibile intră în contact, există o interfaţă care deschide o zonă de tranziţie în care diferenţele dintre proprietăţile fizice ale celor două fluide tind, în timp, să se niveleze. Acest efect global rezultă din acţiunea simultană a unor fenomene fizico-chimice, cum ar fi *difuzia moleculară*, sau *diferenţele de permeabilitate* ale mediului poros.

Fenomenul datorită căruia apare mişcarea şi împrăştierea poluantului poartă numele de *dispersie*. Mecanismul dispersiei este foarte complicat. Dispersia este rezultatul acţiunii simultane a unui fenomen pur mecanic şi a unui fenomen fizico-chimic.

[1] Dirichlet, Gustav Lejeune (1805 – 1859), matematician german, autor al cercetarilor asupra seriilor trigonometrice, cel care a definit conceptul de funcţie în sensul ei modern de corespondenţă.

[2] Neumann, John von (1903 - 1957), matematician american evreu de origine austro–ungară cu importante contribuţii în fizica cuantică, analiza funcţională, teoria mulţimilor, topologie, economie, informatică, analiza numerică, hidrodinamica exploziilor, statistică şi în multe alte domenii ale matematicii, fiind unul din cei mai importanţi matematicieni din istorie. Von Neumann a fost un pionier al aplicaţiilor teoriei operatorilor în mecanica cuantică, membru al Proiectului Manhattan şi al Institutului pentru Studii Avansate de la Princeton (fiind unul din primii savanţi aduşi - un grup numit uneori "semizeii"), şi co–creator al teoriei jocurilor şi a conceptelor din automatele celulare şi constructorul universal. Împreună cu Edward Teller şi Stanislaw Ulam, von Neumann a rezolvat probleme cheie din teoria fizicii nucleare implicată în reacţiile termonucleare şi bomba cu hidrogen.

Descrierea fizică a *fenomenului de dispersie* poate fi făcută prin suprapunerea unui *fenomen de difuzie moleculară* a substanţei poluante cu un *fenomen de convecţie* (*advecţie*), datorat existenţei unui câmp de viteze în domeniul în care are loc poluarea.

Vom studia *dispersia unui poluant* în apa aflată într-un mediu poros, prin determinarea *concentraţiei substanţei poluante* într-un punct din domeniul de curgere, la un moment dat. Această concentraţie este influenţată de natura mediului poros (prin *porozitate*, *conductivitate hidraulică*, *tortuozitate*), de *regimul de curgere* (prin *câmpul vitezelor*) si de *natura poluantului* (prin *coeficientul de difuzie moleculară*).

Prin tortuozitate (τ) se înţelege raportul dintre distanţa între capetele traiectoriei parcurse de poluant (în linie dreaptă) şi distanţa reală, parcursă prin pori (mult mai mare decât cea reală).

În literatura de specialitate sunt prezentate trei categorii de modele matematice ale fenomenului de dispersie a unui poluant în apa aflată într-un mediu poros:

– *modele geometrice*;

– *modele geometrico–statistice*;

– *modele probabilistice*.

Modelele geometrice si cele geometrico-statistice au la bază reprezentarea mediului poros printr-o reţea geometrică, care să permită exprimarea matematică a fenomenului. Astfel de modele necesită un număr mare de parametri, caracteristici geometriei date. Reprezentarea mediului poros printr-o reţea geometrică constituie o idealizare a condiţiilor reale. Pentru a face numărul cel mai mic de presupuneri cu privire la geometria locală a mediului poros s-a căutat un model general, o reprezentare generală a dispersiei. Aceasta a condus la realizarea unor modele probabilistice, bazate pe ideea că datele privitoare la mediul poros sunt aleatorii si că cea mai potrivită reprezentare a unei situaţii este aceea de a reprezenta mediul printr-un set de variabile aleatorii. De asemenea, există deduceri deterministe ale ecuaţiei dispersiei. Acestea se bazează pe legea conservării masei şi pe cele două legi ale lui Fick[3] .

În continuare, prezentăm descrierea matematică a dispersiei unui poluant într-un mediu poros saturat.

Ecuaţia care descrie *fenomenul de transfer de masă*, într-un fluid care circulă printr-un mediu poros, în forma generală este:

$$u_t(\mathbf{x},t) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\Big(\mathcal{D}\Big(\rho(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\nabla}\frac{u(\mathbf{x},t)}{\rho(\mathbf{x},t)}\Big)\Big) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\Big(\mathbf{v}(\mathbf{x},t)u(\mathbf{x},t)\Big) + S_r(\mathbf{x},t) \tag{6.14}$$

sau

$$u_t(\mathbf{x},t) = T_d + T_c + Sr, \tag{6.15}$$

în care: $u(\mathbf{x},t)$ este *concentraţia poluantului* într-un punct din domeniu, la un moment dat;

$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ este viteza apei în porii mediului saturat; $\rho(\mathbf{x},t)$ este *densitatea amestecului*;

$\mathcal{D}$ este o *transformare liniară* definită pe $\mathbb{R}^3$, cu valori în $\mathbb{R}^3$, care caracterizează dispersia poluantului în apa din mediul poros; $Sr(\mathbf{x},t)$ reprezintă o *sursă de substanţă poluantă* într-un punct sau într-o zonă din domeniu (sau *adsorbţia poluantului* în matricea poroasă); T_d reprezintă *transportul difuzional* şi se realizează prin mişcarea neîncetată a moleculelor care se ciocnesc şi schimbă astfel, între ele, energie; T_c este *transportul convectiv* (*advectiv*) sau *flux advectiv* şi corespunde deplasării particulelor antrenate de mişcarea generală a fluidului.

Când se doreşte exprimarea matematică a fenomenului de dispersie, se face referire la ecuaţia (6.14) sau (6.15).

Din analiza fenomenului de dispersie a unui poluant într-un mediu poros rezultă existenţa a trei mecanisme principale, de migraţie a substanţelor poluante:

– *convecţia* (*advecţia*);

– *difuzia moleculară*;

– *dispersia mecanică sau cinematică.*

[3]Fick, Adolf (1829 – 1901), fiziolog german, care a formulat legile difuziei. A mai contribuit şi la studiul contracţiei musculare

Pornind de la definirea fenomenului, se poate exprima matematic fiecare din cele trei mecanisme.

Prin convecţie (advecţie) vom înţelege antrenarea elementelor în soluţie, în mişcarea fluidului care se deplasează.

Difuzia moleculară este un fenomen fizic legat de agitaţia moleculară. Într-un fluid în repaus, mişcarea browniană provoacă deplasarea particulelor în toate direcţiile spaţiului. Dacă concentraţia fluidului este omogenă în spaţiu, două puncte vecine trimit, în medie, acelaşi număr de particule unul spre celălalt, iar agitaţia moleculară nu modifică concentraţia soluţiei. Dacă există un gradient de concentraţie între două puncte vecine, punctul cu concentraţie mai ridicată va trimite, în medie, mai multe particule în toate direcţiile, decât punctele cu concentraţie slabă. Rezultatul acestei agitaţii moleculare va fi un flux de particule dinspre zona cu concentraţie mai ridicată spre cea cu concentraţie mai scăzută.

Dispersia cinematică (mecanică) este un fenomen de amestec, legat de eterogenitatea vitezelor microscopice. Dispersia cinematică ar putea fi rezumată prin următoarele aspecte:

(i) *propagare mai rapidă a elementelor transportate în axa porilor*;

(ii) *diferenţă a vitezelor medii între pori diferiţi*;

(iii) *liniile de curent se întrepătrund, provocând o diluţie neuniformă a concentraţiei.*

Transformarea $\mathcal{D}$ din ecuaţia (6.14) se numeşte *coeficient de dispersie* si conţine în ea atât efectul difuziei moleculare a poluantului în apă cât si pe cel al vitezei apei în porii materialului poros. Dacă se alege ca bază în $\mathbb{R}^3$ versorii direcţiilor principale de anizotropie ale corpului, atunci matricea transformării liniare $\mathcal{D}$ în această bază are forma diagonală

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_L & 0 & 0 \\ 0 & D_T & 0 \\ 0 & 0 & D_T \end{pmatrix}.$$

În matricea de mai sus, D_L este numit *coeficient de dispersie longitudinală* (în sensul curgerii), iar D_T se numeşte *coeficient de dispersie transversală* în două direcţii ortogonale la direcţia de curgere.

Pentru a obţine soluţii cu semnificaţie fizică, ecuaţiei (6.14) i se adaugă condiţia iniţială şi condiţii pe frontiera corpului, care de fapt sunt condiţii de unicitate.

6.3 Proprietăţi ale soluţiilor problemelor de propagare a căldurii

Vom considera unele probleme care se pun în legătură cu ecuaţia propagării căldurii într–o singură dimensiune spaţială şi vom studia unele proprietăţi ale soluţiilor acestor probleme. Ne vom ocupa deci de cel mai simplu exemplu de ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic şi anume *ecuaţia parabolică liniară*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x,t)\,u, \tag{6.16}$$

unde $a > 0$ este *constanta de difuzivitate*, iar funcţiile $\alpha(x,t)$ şi $\beta(x,t)$ sunt funcţii continue. În cazul particular când $\alpha(x,t)$ şi $\beta(x,t)$ sunt identic nule, ecuaţia (6.16) descrie propagarea unidimensională a căldurii fără surse interne de căldură (vezi ecuaţia (6.8), particularizată desigur la cazul unidimensional).

Fie $\mathcal{D}$ un domeniu din planul xOt având frontiera $\partial\mathcal{D} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, unde Γ_1 este segmentul de dreaptă AB situat pe paralela $t = T > 0$ la axa orizontală Ox, iar $\Gamma_2 = AMB$ este un arc simplu de curbă situat în semiplanul $t < T$. Vom presupune că domeniul $\mathcal{D}$ este situat în semiplanul $t \geq 0$, situaţie care poate fi întotdeauna realizată printr–o schimbare de variabile dacă este cazul.

De asemeni, vom presupune că soluţia ecuaţiei (6.16) este de clasă C^2 pe domeniul ei de definiţie.

Teorema 6.3.1. (**Principiul de extrem pentru o ecuaţie parabolică**) *Fie $u(x,t)$ soluţia ecuaţiei (6.16) pe $\mathcal{D} \cup \Gamma_1$, despre care presupunem că este continuă pe $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ şi fie $\beta(x,t) \leq 0$ pe $\mathcal{D}$. Dacă*

$$\sup_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} u(x,t) > 0, \tag{6.17}$$

atunci acesta este atins pe porţiunea de frontieră Γ_2.

Demonstraţie. Fie $\forall\varepsilon > 0$ şi $v(x,y) = u(x,y) - \varepsilon t,\ (x,t) \in \overline{\mathcal{D}}$. Deoarece $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} u(x,t) = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} v(x,t) + \varepsilon T$, conform ipotezei (6.17), putem alege $\varepsilon > 0$ astfel ca $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} v(x,t) > 0$. Dacă ar exista $(x_0,t_0) \in \mathcal{D}\cup\Gamma_1$ aşa încât $v(x_0,t_0) = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} v(x,t)$, atunci există $\delta > 0$ pentru care segmentul

$$I = \{(x,t_0) :\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\} \subset \mathcal{D}\cup\Gamma_1.$$

Acest interval este paralel cu axa orizontală Ox, are lungimea 2δ şi centrul în punctul (x_0,t_0).

Fiindcă $x_0 \in I$ este punct de maxim pentru funcţia $v(x,t_0)$, $x \in I$, de două ori derivabilă pe I, avem

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,t_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0) \leq 0.$$

Ţinând seama că $u(x,y) = v(x,y) + \varepsilon t$ verifică (6.16), rezultă că funcţia $v(x,t)$ satisface ecuaţia

$$a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \alpha(x,t)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) + \beta(x,t)v(x,t) - \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \varepsilon(1 - t\beta(x,t)).$$

Luând aici $(x,t) = (x_0,t_0)$, având în vedere relaţiile precedente şi faptul că $\beta(x_0,t_0)v(x_0,t_0) \leq 0$, obţinem că $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0) < -\varepsilon$. Continuitatea funcţiei $\dfrac{\partial v}{\partial t}(x_0,t)$ asigură existenţa unui $\eta > 0$ astfel ca

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in [t_0-\eta, t_0+\eta].$$

Integrând această inegalitate pe segmentul $[t_0-\eta, t_0]$, obţinem

$$v(x_0,t_0) - v(x_0,t_0-\eta) \leq -\frac{\varepsilon}{2}\eta.$$

Inegalitatea astfel obţinută arată că punctul (x_0,t_0) nu poate aparţine mulţimii $\mathcal{D}\cup\Gamma_1$, deci el aparţine porţiunii de frontieră Γ_2. Acum, ţinând seama că pentru orice punct $(x,t) \in \mathcal{D}$ avem $t > 0$, obţinem

$$\sup_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} u(x,t) \leq \varepsilon T + \sup_{(x,t)\in\Gamma_2} v(x,t) = \varepsilon T + \sup_{(x,t)\in\Gamma_2}[u(x,t) - \varepsilon t] \leq \varepsilon T + \sup_{(x,t)\in\Gamma_2} u(x,t).$$

Făcând $\varepsilon \to 0$ în inegalitatea $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} u(x,t) \leq \varepsilon T + \sup\limits_{(x,t)\in\Gamma_2} u(x,t)$ rezultă

$$0 < \sup_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} u(x,t) = \sup_{(x,t)\in\Gamma_2} u(x,t),$$

adică valoarea pozitivă maximă, dacă există, este atinsă pe Γ_2. **q.e.d.**

Observaţia 6.3.1. *Dacă u este soluţie a ecuaţiei (6.16), atunci şi $-u$ este soluţie a acestei ecuaţii. Repetând raţionamentul de mai sus pentru funcţia $-u$, obţinem că dacă $\inf\limits_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} u(x,t) < 0$, atunci acesta este atins pe Γ_2.*

Observaţia 6.3.2. *Remarca precedentă, împreună cu concluzia Teoremei 6.3.1, arată că dacă $\beta(x,t) \leq 0$ pe $\mathcal{D}$, atunci orice soluţie a ecuaţiei (6.16) satisface condiţia*

$$\|u\| = \sup_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} |u(x,t)| \leq \sup_{(x,t)\in\Gamma_2} |u(x,t)|. \tag{6.18}$$

Teorema 6.3.2. *Dacă* $(x,t) \to \phi(x,t)$, $(x,t) \in \Gamma_2$ *este o funcţie continuă, atunci există cel mult o soluţie a ecuaţiei* (6.16) *care satisface condiţia*

$$u(x,t) = \phi(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_2. \tag{6.19}$$

Demonstraţie. Dacă $u_1(x,t)$ şi $u_2(x,t)$ sunt două soluţii ale problemei (6.16), (6.19), atunci funcţia $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ este soluţie a ecuaţiei (6.16), care satisface condiţia

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma_2.$$

Dacă $\beta(x,t) \leq 0$ pe $\mathcal{D}$, atunci aplicând Teorema 6.3.1, avem că $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0$ pe $\mathcal{D}$, ceea ce este echivalent cu $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ pe $\mathcal{D}$.

Dacă $\beta(x,t) > 0$ pe $\mathcal{D}$, atunci există $\beta_0 > 0$ aşa îcât $\beta_0 > \beta(x,t)$, pe $\overline{\mathcal{D}}$. În acest caz, funcţia

$$w(x,t) = v(x,t)\exp(\beta_0 t)$$

verifică ecuaţia

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha(x,t)\frac{\partial w}{\partial x} + \tilde{\beta}(x,t)w, \quad (x,t) \in \mathcal{D}$$

şi condiţia $w(x,t) = 0$ pe Γ_2. Deoarece $\tilde{\beta}(x,t) = \beta(x,t) - \beta_0 < 0$, pe $\mathcal{D}$, rezultă că $w(x,t) = 0$ pe $\mathcal{D}$ şi deci $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ pe $\mathcal{D}$. Cu aceasta am demonstrat unicitatea soluţiei problemei (6.16), (6.19). **q.e.d.**

Teorema 6.3.3. *Dacă soluţia a problemei* (6.16), (6.19) *există, atunci ea* ***depinde continuu*** *de valoarea ei pe* Γ_2.

Demonstraţie. Deoarece mulţimea de puncte Γ_2 este compactă şi $\phi(x,t)$ este continuă pe Γ_2, avem evident

$$\|\phi\| = \sup_{(x,t)\in\Gamma_2} |\phi(x,t)| < \infty. \tag{6.20}$$

Fie $u_1(x,t)$ şi $u_2(x,t)$ soluţii ale ecuaţiei (6.16) satisfăcând condiţiile $u_1(x,t) = \phi_1(x,t)$, pentru $(x,t) \in \Gamma_2$, respectiv $u_2(x,t) = \phi_2(x,t)$, pentru $(x,t) \in \Gamma_2$, funcţiile date ϕ_1 şi ϕ_2 fiind funcţii continue pe Γ_2.

Luând $\beta_0 \geq 0$ (β_0 se ia zero, dacă $\beta(x,t) \leq 0$, pe $\mathcal{D}$) ca la Teorema 6.3.3, notând $u_1(x,t) - u_2(x,t) = w(x,t)\exp(\beta_0 t)$ şi aplicând inegalitatea (6.18), obţinem

$$\sup_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| = \sup_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} |w(x,t)\exp(\beta_0 t)| \leq \exp(\beta_0 t) \sup_{(x,t)\in\Gamma_2} |\phi_1(x,t) - \phi_2(x,t)|.$$

Aşadar, $\forall\varepsilon > 0$ avem

$$\sup_{(x,t)\in\overline{\mathcal{D}}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon,$$

de îndată ce

$$\sup_{(x,t)\in\Gamma_2} |\phi_1(x,t) - \phi_2(x,t)| < \delta(\varepsilon, T) = \exp(-\beta_0 t)\varepsilon, \;\; T > 0.$$

Aceasta însemnă că la variaţii mici ale valorii soluţiei problemei (6.16), (6.19) pe Γ_2, variaţii măsurate cu ajutorul normei (6.20), corespund variaţii mici ale soluţiei pe $\mathcal{D}$, variaţii care sunt măsurate cu ajutorul normei

(6.18). Aceasta înseamnă că soluţia problemei (6.16), (6.19) *depinde continuu* de datele pe porţiunea Γ_2 a frontierei lui $\mathcal{D}$. **q.e.d.**

6.4 Propagarea căldurii într–o bară de lungime finită cu condiţii la limită şi iniţiale neomogene, în absenţa surselor interne de căldură

Vom aplica rezultatele obţinute până acum la studiul a două probleme referitoare la ecuaţia propagării căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0 \tag{6.21}$$

într–o singură dimensiune spaţială, în absenţa surselor interne de căldură. Ecuaţia (6.21) se obţine din (6.16) dacă luăm $\alpha(x,t) = 0$ şi $\beta(x,t) = 0$. Această ultimă condiţie face ca rezultatele conţinute în Teorema 6.3.1 şi Teorema 6.3.2 să fie adevărate pentru ecuaţia (6.21).

Să considerăm problema determinării unei soluţii a ecuaţiei (6.21) pe domeniul

$$\Omega = \{(x,t) : \ x \in [0,\ell],\, t \in [0,+\infty)\},$$

care să satisfacă condiţia iniţială neomogenă

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,\ell], \tag{6.22}$$

şi condiţiile la capete (pe frontiera barei)

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(\ell,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,+\infty), \tag{6.23}$$

unde ϕ, μ_1 şi μ_2 sunt funcţii continue pe domeniul lor de definiţie verificând condiţiile de compatibilitate

$$\phi(0) = \mu_1(0), \quad \phi(\ell) = \mu_2(0).$$

Din punct de vedere fizic problema revine la găsirea distribuţiei temperaturii într–o bară de lungime finită $\ell > 0$, cunoscând condiţia termică a barei la momentul $t = 0$, descrisă de funcţia $\phi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ şi temperaturile la care sunt menţinute capetele O şi A ale barei.

Observaţia 6.4.1. *În baza Teoremei 6.3.2, dacă soluţia problemei (6.21), (6.22), (6.23) există, atunci ea este unică pe orice dreptunghi $OABC$, unde O este originea reperului xOt şi totodată una din extremităţile barei, $A(\ell,0)$ este cealaltă extremitate, $B(\ell,t_0)$, cu $t_0 > 0$, $C(0,t_0)$. În plus, această soluţie depinde continuu de datele pe laturile CO, OA şi AB ale dreptunghiului (Γ_2 din Teorema 6.3.2 este $OA \cup AB \cup OC$). De aici rezultă că dacă soluţia problemei (6.21), (6.22), (6.23) există pe* ***banda semi–infinită*** *Ω, atunci ea* ***este unică şi depinde continuu de datele pe frontiera*** *acesteia. Frontiera mulţimii Ω este formată din semiaxa pozitivă Ot, din segmentul OA şi semidreapta pozitivă $x = \ell$.*

Vom construi soluţia problemei (6.21), (6.22), (6.23) folosind *metoda lui Fourier de separare a variabilelor*.

Dacă în problema (6.21), (6.22), (6.23) trecem de la funcţia necunoscută $u(x,t)$ la noua funcţie necunoscută $v(x,t)$ prin relaţia

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{1}{a}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\Big)\cdot x, \tag{6.24}$$

atunci $v(x,t)$ este soluţia problemei

$$(P) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial w}{\partial t}, \\ v(x,0) = \phi(x) - w(x,0), \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0. \end{cases}$$

Să observăm acum că dacă $v_1(x,t)$ şi $v_2(x,t)$ sunt soluţiile problemelor (P_1), respectiv (P_2) definite după cum urmează:

$$(P_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(x,0) = \phi(x) - w(x,0), \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0; \end{cases} \qquad (P_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \dfrac{\partial w}{\partial t}, \\ v(x,0) = 0, \\ v(0,t) = v(\ell,t) = 0, \end{cases}$$

atunci $v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t)$ este soluţia problemei (P). Prin urmare, soluţia problemei (6.21), (6.22), (6.23) este

$$u(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t) + w(x,t). \tag{6.25}$$

Din acest motiv, în cele ce urmează expunem metoda lui Fourier pentru determinarea soluţiilor problemelor care să conţină drept caz particular problemele (P_1) şi (P_2).

6.5 Propagarea temperaturii într–o bară izolată termic, cu condiţie iniţială nenulă şi în absenţa surselor de căldură

sau infinită în ambele sensuri şi care este redusă la un singur segment de dreaptă este neglijabilă, iar temperatura este constantă într–o secţiune

În ipoteza că între suprafaţa barei de lungime finită ℓ şi mediul înconjurător nu există schimb de căldură (bara este *izolată termic* nici *surse de căldură în interior*, ceea ce înseamnă că $f(x,t) = 0$, iar μ_1 şi μ_2 sunt funcţii identic nule, funcţia $u = u(x,t)$ care dă valoarea temperaturii la orice moment t, în orice punct x al barei, trebuie căutată ca soluţie a ecuaţiei

$$)\frac{1}{a^2}u_t - u_{xx} = 0 \tag{6.26}$$

cu o condiţie iniţială şi condiţii date.

Presupunând că extremităţile $x = 0$ şi $x = \ell$ ale barei sunt menţinute la temperatura zero, condiţiile la limită constau din relaţiile:

$$u(0,t) = 0; \quad u(\ell,t) = 0, \quad \forall\, t > 0 \tag{6.27}$$

La momentul $t = 0$, când se începe studiul propagării temperaturii în bară, presupunem că se cunoaşte forma barei, ceea ce se traduce prin *condiţia iniţială*

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \forall\, x \in [0,\ell], \tag{6.28}$$

unde $\phi(x)$ este o funcţie de clasă $C^1([0,\ell])$ care satisface *condiţiile de compatibilitate* $\phi(0) = \phi(\ell) = 0$. Rezultă că funcţia ϕ poate fi reprezentată ca o *serie Fourier de sinusuri* pe $[0,\ell]$, serie care este *absolut şi uniform convergentă* pe $[0,\ell]$,

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad \forall\, x \in [0,\ell], \tag{6.29}$$

coeficienţii dezvoltării fiind daţi de relaţiile

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx, \quad \forall\, n \in I\!N^*. \tag{6.30}$$

Aplicând *metoda separării variabilelor*, căutăm soluţii particulare ale ecuaţiei (6.26), sub forma

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t), \quad \forall\,(x,t) \in [0,\ell]\times[0,\infty). \tag{6.31}$$

Introducând u din (6.31) în ecuaţia cu derivate parţiale (6.26), obţinem următoarele ecuaţii diferenţiale ordinare:

$$T'(t) + a^2\lambda\, T(t) = 0; \tag{6.32}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{6.33}$$

Pentru determinarea soluţiilor nebanale de forma (6.31), ale ecuaţiei (6.26), care satisfac condiţia la limită (6.27), trebuie aflate mai întâi soluţiile nebanale ale ecuaţiei (6.33) cu condiţia la limită

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0. \tag{6.34}$$

Pentru valorile lui λ egale cu $\lambda_n = \Big(\dfrac{n\pi}{\ell}\Big)^2$, unde $n \in I\!N^*$, şi numai pentru aceste valori, există soluţii nebanale $X_n(x)$, ale *problemei Cauchy* (6.33), (6.34), egale cu

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad n \in I\!N^*. \tag{6.35}$$

Valorilor $\lambda_n = \Big(\dfrac{n\pi}{\ell}\Big)^2$ le corespund următoarele soluţii ale ecuaţiei (6.32) :

$$T_n(t) = b_n \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 t\Big), \quad t \in [0,\infty), \tag{6.36}$$

unde, pentru claritatea scrierii am utilizat simbolul $\exp y$ pentru valoarea în y a funcţiei exponenţiale cu baza e, iar, după cum vom constata îndată, coeficienţii b_n sunt, până la un factor, coeficienţii precizaţi în (6.30).

Din cele stabilite mai sus, deducem că funcţiile

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\,b_n \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 t\Big)\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (x,t) \in [0,\ell]\times[0,\infty), \quad n \in I\!N^* \tag{6.37}$$

satisfac ecuaţia (6.26) şi condiţiile la limită (6.27), indiferent de b_n.

Folosind *principiul superpoziţiei* [18], rezultă că funcţia

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 t\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (x,t) \in [0,\ell]\times[0,\infty) \tag{6.38}$$

satisface ecuaţia (6.26) şi condiţiile la limită (6.27), cu presupunerea că seria de funcţii din membrul drept al egalităţii (6.38) trebuie să fie *absolut şi uniform convergentă* pe domeniul indicat alăturat, condiţie care este îndeplinită dacă avem în vedere ipotezele de lucru.

Impunând funcţiei $u(x,t)$ din (6.37) să satisfacă şi *condiţia iniţială* (6.28), deducem că ar trebui să avem

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (x,t) \in [0,\ell]\times[0,\infty). \tag{6.39}$$

Din unicitatea dezvoltării unei funcţii periodice în serie Fourier numai de sinusuri şi relaţiile (6.29), (6.39), deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (x,t) \in [0,\ell]\times[0,\infty). \tag{6.40}$$

Seriile de funcţii din (6.40) sunt egale dacă şi numai dacă

$$b_n = \sqrt{\frac{\ell}{2}}a_n, \tag{6.41}$$

unde coeficienţii a_n sunt precizaţi în (6.29).

Introducând b_n din (6.41) în (6.38), ajungem la concluzia în bara subţire omogenă, de lungime finită ℓ, se propagă după legea

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\Big(-\Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 t\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (x,t) \in [0,\ell]\times[0,\infty), \tag{6.42}$$

unde coeficienţii a_n sunt daţi în (6.30).

Prezenţa factorului $\exp\Big(-\dfrac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 t$, unde $t\geq 0$, în seriile (6.38) şi (6.42), precum şi proprietăţile seriei (6.29), (6.30) atrage faptul că seria (6.42) este infinit derivabilă termen cu termen, iar suma sa $u(x,t)$ este soluţia problemei (6.26), (6.27), (6.28). Prin urmare, putem afirma că într–o bară subţire care nu face schimb de căldură cu exteriorul şi fără surse termice în interiorul ei, căreia îi cunoaştem distribuţia temperaturii la momentul iniţial, temperatura se propagă după legea (6.42).

Observaţia 6.5.1. *Trecerea, în raţionamentele de mai sus, a funcţiei $\phi(x)$ în $\phi(x)-w(x,0)$ conduce la soluţia problemei (P_1).*

Dacă în (6.42) introducem valoarea lui a_n, dată de (6.30), obţinem că soluţia (6.42) se poate scrie în forma

$$u(x,t)=\int_0^{\ell}G(x,t;\xi)\phi(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in[0,\ell]\times[0,\infty), \tag{6.43}$$

unde s–a efectuat notaţia

$$G(x,t;\xi)=\frac{2}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\Big(-\frac{ak\pi}{\ell}\Big)^2 t\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}x\cdot\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi,\quad (x,t;\xi)\in[0,\ell]\times[0,\infty)\times[0,\ell]. \tag{6.44}$$

Definiţia 6.5.1. *a Funcţia $G(x,t;\xi)$ din (6.44) se numeşte* ***funcţia lui Green pentru ecuaţia căldurii****.*

Exerciţiul 6.5.1. *Să se găsească soluţia $u(x,t)$ a ecuaţiei propagării căldurii printr–o bară de lungime 4 unităţi*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

ştiind că bara este izolată termic, adică

$$u(0,t)=0,\quad u(\ell,t)=0,\quad t\in[0,\infty),$$

iar temperatura sa la momentul iniţial $t=0$ este dată de

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & \text{dacă}\quad 0\leq x\leq 2,\\[2mm] \dfrac{4-x}{2}, & \text{dacă}\quad 2< x\leq 4\end{cases}=\varphi(x).$$

Soluţie. Conform teoriei dezvoltată mai sus, soluţia problemei este

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\big(-\frac{n^2\pi^2}{4}t\big)\sin\frac{n\pi}{4}x,$$

unde

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{4}\xi d\xi.$$

Introducând aici expresia funcţiei $\varphi(x)$, avem

$$a_n=\frac{1}{2}\Big(\int_0^2\frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{4}dx+\int_2^4\frac{4-x}{2}\sin\frac{n\pi x}{4}dx\Big)=$$

$$=\frac{8}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^k\dfrac{8}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{dacă}\quad n=2k+1,\\[2mm] 0, & \text{dacă}\quad n=2k.\end{cases}.$$

Din aceste calcule rezultă că soluţia problemei are în final expresia

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\exp\big(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{4}t\big)\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}x.$$

■

6.6 Propagarea căldurii într–o bară finită, cu date la limită şi iniţiale nule, în prezenţa surselor interne de căldură

Să aplicăm metoda lui Fourier pentru găsirea soluţiei problemei

$$(Q)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \;\; (x,t)\in[0,\ell]\times[0,+\infty),\\ u(x,0)=0, \;\; x\in[0,\ell],\\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, \;\; t\in[0,+\infty),\end{cases}$$

unde $f(x,t)$ este funcţie de clasă C^1 pe banda semi–infinită $[0,\ell]\times[0,+\infty)$.

Această problemă modelează matematic propagarea temperaturii într–o bară subţire de lungime ℓ, temperatură datorată doar unei surse de căldură descrisă de funcţia $f(x,t)$. Prin urmare, bara nu efectuează schimb de căldură cu exteriorul nici prin suprafaţa sa laterală şi nici prin extremităţile sale, iar la momentul iniţial, adică la momentul $t=0$, temperatura este considerată a fi nulă.

Căutăm o soluţie a problemei (Q) în forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (x,t)\in[0,\ell]\times[0,\infty), \tag{6.45}$$

unde $T_n(t)$ sunt funcţii ce urmează a fi determinate.

Dezvoltând funcţia $f(x,t)$ în serie de sinusuri pe $[0,\ell]$, avem

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad (x,t)\in[0,\ell]\times[0,\infty), \tag{6.46}$$

unde coeficienţii dezvoltării sunt daţi de

$$\phi_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x,t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \quad n\in I\!N^*. \tag{6.47}$$

Punând condiţia ca (6.45) să verifice ecuaţia neomogenă a propagării temperaturii (prima relaţie din (Q)), şi ţinând cont de (6.46), obţinem egalităţile

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(T_n'(t) + \Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 T_n(t) - \phi_n(t)\Big)\sin\frac{n\pi}{\ell}x = 0, \quad n\in I\!N^*,$$

care au loc dacă $T_n(t)$, pentru fiecare $n\in I\!N^*$, este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$T_n'(t) + \Big(\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 T_n(t) = \phi_n(t). \tag{6.48}$$

Este evident că funcţia $u(x,t)$ din (6.45) verifică condiţia la limită a problemei (Q). Funcţia $u(x,t)$ verifică şi condiţia iniţială din (Q) dacă şi numai dacă avem

$$T_n(0) = 0, \quad n\in I\!N^*. \tag{6.49}$$

Din (6.48) şi (6.49), obţinem

$$T_n(t) = \int_0^{\infty} \phi_n(\tau) \exp\Big(\Big(-\frac{n\pi a}{\ell}\Big)^2 (t-\tau)\Big) d\tau, \quad n \in I\!N^*. \tag{6.50}$$

În ipotezele impuse, funcţia (6.45), cu $T_n(t)$, $n \in I\!N^*$, daţi de (6.50) este soluţia problemei (Q), iar soluţia problemei (P_2) se obţine pentru $f(x,t) = -\dfrac{\partial w}{\partial t}(x,t)$.

6.7 Propagarea căldurii într–o bară finită, cu condiţii la limită şi iniţiale neomogene, în prezenţa unei surse interne de căldură

Presupunem că se dau funcţiile

$$\begin{aligned} &f : [0,\ell] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}, && f \in C^0([0,\ell] \times [0,\infty)),\\ &\mu_1, \mu_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}, && \mu_1, \mu_2 \in C^0([0,\infty)),\\ &\phi : [0,\ell] \to \mathbb{R}, && \phi \in C^0([0,\ell]), \end{aligned}$$

şi că se cere determinarea funcţiei $u : [0,\ell] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u \in C^0([0,\ell] \times [0,\infty))$, care să verifice ecuaţia unidimensională a propagării căldurii

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{6.51}$$

în bara de lungime ℓ, în prezenţa sursei interne de căldură $f(x,t)$, să satisfacă condiţiile la limită

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(\ell,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,\infty) \end{cases} \tag{6.52}$$

şi condiţia iniţială

$$\{\ u(x,0) = \phi(x), \quad x \in [0,\ell]. \tag{6.53}$$

Teorema care urmează va reduce rezolvarea problemei (6.51), (6.52), (6.53) la o problemă asemănătoare, dar cu condiţii la limită omogene. Pentru aceasta introducem funcţia

$$f^*(x,t) = f(x,t) - \frac{1}{a^2}\Big(\mu_1'(t) + \frac{x}{\ell}\Big(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)\Big)\Big), \quad (x,t) \in [0,\ell] \times [0,\infty), \tag{6.54}$$

care va fi o nouă *sursă internă de căldură*.

Introducem de asemenea, funcţia

$$\phi^*(x) = \phi(x) - \Big(\mu_1(0) + \frac{x}{\ell}\Big(\mu_2(0) - \mu_1(0)\Big)\Big)$$

care va constitui o nouă *dată iniţială* .

Teorema 6.7.1. *Dacă $u^*(x,t)$ este soluţia problemei la limită cu date iniţiale*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f^*(x,t), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \ \ t \in [0,\infty), \\ u(x,0) = \phi^*(x), \ \ x \in [0,\ell], \end{cases} \tag{6.55}$$

atunci funcţia

$$u(x,t) = u^*(x,t) + \mu_2(t) + \frac{x}{\ell}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\Big), \quad (x,t) \in [0,\ell] \times [0,\infty), \tag{6.56}$$

este soluţia problemei (6.51), (6.52), (6.53).

Demonstraţie. Arătăm mai întâi că funcţia (6.56) verifică ecuaţia $(6.55)_1$, pentru aceasta având nevoie de derivatele sale. Folosind (6.56), obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= \dfrac{\partial u^*}{\partial t} + \mu_1'(t) + \dfrac{x}{\ell}\Big(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)\Big), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} &= \dfrac{\partial u^*}{\partial x} + \dfrac{1}{\ell}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\Big), \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}. \end{cases} \tag{6.57}$$

Înmulţind prima şi a treia relaţie din (6.57) cu $1/a^2$, respectiv -1, adunându–le şi folosind faptul că $u^*(x,t)$ satisface ecuaţia $(6.55)_1$, precum şi (6.54), obţinem

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u^*}{\partial t} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2}\Big(\mu_1'(t) + \frac{x}{\ell}\Big(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)\Big)\Big) =$$
$$= f^*(x,t) + \frac{1}{a^2}\Big(\mu_1'(t) + \frac{x}{\ell}\Big(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)\Big)\Big) = f(x,t),$$

ceea ce înseamnă că funcţia u din (6.56) este soluţie a ecuaţiei (6.51).

Din (6.56) obţinem de asemenea

$$\begin{cases} u(0,t) = u^*(0,t) + \mu_1(t) + \dfrac{0}{\ell}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\Big) = \mu_1(t), \\ u(\ell,t) = u^*(\ell,t) + \mu_1(t) + \dfrac{\ell}{\ell}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\Big) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = u^*(x,0) + \mu_1(0) + \dfrac{x}{\ell}\Big(\mu_2(0) - \mu_1(0)\Big) = \phi^*(x) + \mu_1(0) + \dfrac{x}{\ell}\Big(\mu_2(0) - \mu_1(0)\Big) = \phi(x), \end{cases}$$

ceea ce arată că funcţia u din (6.56) satisface condiţiile la limită (6.52) şi condiţia iniţială (6.53). **q.e.d.**

6.8 Principiul lui Duhamel pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene a propagării temperaturii într–o bară de lungime finită

Teorema 6.8.1. (**Principiul lui Duhamel**) *Dacă pentru fiecare $\tau \in [0,\infty)$ fixat notăm cu $w(x,t,\tau)$ soluţia ecuaţiei*

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{6.58}$$

care verifică condiţiile

$$\begin{cases} w(0,t,\tau) = 0, \\ w(\ell,t,\tau) = 0 \end{cases} \tag{6.59}$$

şi

$$w(x,0,\tau) = a^2 f(x,\tau), \tag{6.60}$$

atunci funcţia

$$u_p(x,t) = \int_0^t w(x,t-\tau,\tau)d\tau \tag{6.61}$$

este soluţia ecuaţiei

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{6.62}$$

care satisface condiţiile iniţiale şi la limită

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(\ell,t) = 0. \end{cases} \tag{6.63}$$

Demonstraţie. Calculăm derivatele funcţiei (6.61) folosind teoria integralelor depinzând de parametri. Avem

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = w(x,0,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)d\tau$$

sau

$$\frac{\partial u_p}{\partial t} = a^2 f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)d\tau.$$

Apoi,

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t-\tau,\tau)d\tau.$$

Din aceste rezultate deducem

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u_p}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\Big(a^2 f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau)d\tau\Big) - \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t-\tau,\tau)d\tau =$$
$$= f(x,t) + \int_0^t \Big(\frac{1}{a^2}\frac{\partial w}{\partial t}(x,t-\tau,\tau) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t-\tau,\tau)\Big)d\tau = f(x,t),$$

ceea ce arată că funcţia (6.61) este soluţia ecuaţiei (6.62).

Din (6.61), (6.59) şi (6.60), găsim

$$\begin{cases} u_p(x,0) = \displaystyle\int_0^0 w(x,t-\tau,\tau)d\tau = 0, \\ u_p(0,t) = \displaystyle\int_0^t w(0,t-\tau,\tau)d\tau = 0, \\ u_p(\ell,t) = \displaystyle\int_0^t w(\ell,t-\tau,\tau)d\tau = 0, \end{cases}$$

adică sunt îndeplinite şi condiţiile (6.63). **q.e.d.**

Observaţia 6.8.1. *În baza Teoremei 6.7.1 şi Teoremei 6.8.1 rezultă că rezolvarea problemei propagării căldurii într–o bară de lungime finită, cu condiţii la limită şi iniţiale nenule, în prezenţa unei surse interne de căldură, denumită şi* ***factor perturbator****, se reduce la determinarea soluţiei problemei*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in [0,\ell] \times [0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), \;\; x \in [0,\ell], \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \;\; t \in [0,\infty), \end{cases}$$

adică a problemei (6.26), (6.27), (6.28), a cărei soluţie a fost determinată într–un paragraf anterior.

6.9 Problema Cauchy pentru ecuaţia propagării căldurii într–o dimensiune spaţială

În cele ce urmează vom considera propagarea temperaturii într–o *bară infinită în ambele sensuri*, ceea ce înseamnă că vom urmări *modul de răcire a unei bare* foarte lungi, cunoscând la momentul iniţial *distribuţia temperaturii* în fiecare punct al ei.

Prin urmare, avem de studiat problema determinării soluţiei ecuaţiei cu derivate parţiale de tip parabolic

$$\frac{1}{a^2}u_t - u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty), \tag{6.64}$$

cu condiţia iniţială

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{6.65}$$

Această problemă cu o condiţie iniţială este cunoscută ca *problema Cauchy pentru ecuaţia propagării căldurii* într–o dimensiune spaţială.

Din punct de vedere fizic, problema (6.64), (6.65) revine la determinarea distribuţiei temperaturii unei bare infinite în ambele sensuri când se cunoaşte distribuţia iniţială a temperaturii.

Pentru început, vom presupune că funcţia $\varphi(x)$ este continuă şi mărginită pe întreaga axă reală.

Teorema 6.9.1. *Există cel mult o soluţie a problemei (6.64), (6.65) care este mărginită în semiplanul $t \geq 0$.*

Demonstraţie. Presupunem că ar exista soluţiile $u_1(x,t)$ şi $u_2(x,t)$ ale problemei (6.64), (6.65) care sunt mărginite în semiplanul $t \geq 0$, adică

$$|u_1(x,t)| \leq M, \quad |u_2(x,t)| \leq M, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Funcţia $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ este o soluţie a problemei (6.64), (6.65) satisfăcând condiţiile

$$w(x,0) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |w(x,t)| \leq 2M, \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Fie $L > 0$ şi $T > 0$ arbitrari. Se verifică imediat că funcţia

$$v(x,t) = \frac{4M}{L}\Big(\frac{x^2}{2} + a^2 t\Big)$$

este o soluţie a ecuaţiei (6.64) şi verifică condiţiile

$$v(x,0) \geq 0 = |w(x,0)|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad |v(\pm L,t)| \geq 2M \geq |w(\pm L,t)|, \quad \forall\, t \in [0, +\infty).$$

Funcţiile $v(x,t) - w(x,t)$ şi $v(x,t) + w(x,t)$ sunt soluţii ale ecuaţiei (6.64) pe dreptunghiul

$$\mathcal{D} = \{(x,t) : \, |x| < L, \; 0 < t < T\}$$

ale cărui vârfuri sunt $A(-L,T)$, $B(-L,0)$, $C(L,0)$ şi $D(L,T)$, iar pe porţiunea de frontieră $\Gamma_2 = AB \cup BC \cup CD$ sunt nenegative şi deci avem:

$$\inf_{\Gamma_2}(v(x,t) - w(x,t)) \geq 0; \quad \inf_{\Gamma_2}(v(x,t) + w(x,t)) \geq 0. \tag{6.66}$$

În baza *principiului de maxim* rezultă că avem

$$\inf_{\overline{\mathcal{D}}}(v(x,t) - w(x,t)) \geq 0; \quad \inf_{\overline{\mathcal{D}}}(v(x,t) + w(x,t)) \geq 0, \tag{6.67}$$

căci în caz contrar am avea $\inf_{\Gamma_2}(v(x,t)-w(x,t))<0;\ \inf_{\Gamma_2}(v(x,t)+w(x,t))<0,$ ceea ce contrazice inegalităţile (6.66). Din inegalităţile (6.67) rezultă $|w(x,t)|\le v(x,t)=\dfrac{4M}{L}\Big(\dfrac{x^2}{2}+a^2t\Big),\quad \forall\,(x,t)\in\overline{\mathcal{D}},$ unde $\overline{\mathcal{D}}$ este închiderea domeniului $\mathcal{D}$.

Fie acum (x_0,t_0) un punct din semiplanul $t\ge 0$, ales arbitrar. Pentru orice $\varepsilon>0$ putem alege L suficient de mare astfel încât să avem $|w(x_0,t_0)|<\varepsilon$ şi deci $w(x_0,t_0)=0$. Cum (x_0,t_0) a fost ales arbitrar, rezultă că avem

$$w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)=0,\quad \forall\,x\in(-\infty,+\infty)\quad \text{şi}\quad \forall\,t\ge 0$$

şi astfel teorema este demonstrată. **q.e.d.**

Observaţia 6.9.1. *Din Teorema* 6.9.1 *rezultă că dacă prin anumite mijloace putem găsi o soluţie a problemei* (6.64), (6.65), *atunci aceasta este unica soluţie a acestei probleme.*

Încercăm să determinăm soluţia ecuaţiei (6.64) folosind metoda separării variabilelor. În acest scop, punem

$$u(x,t)=X(x)T(t),\quad (x,t)\in(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty). \tag{6.68}$$

Înlocuind (6.68) în (6.64), obţinem

$$\frac{1}{a^2}X(x)T'(t)-X''(x)T(t)=0$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}=K,$$

unde K trebuie să fie o constantă deoarece x şi t sunt variabile independente. Avem de integrat ecuaţiile diferenţiale ordinare:

$$X''(x)-K\,X(x)=0,\quad x\in(-\infty,+\infty); \tag{6.69}$$

$$T'(t)-K\,a^2T(t)=0,\quad t\in[0,+\infty). \tag{6.70}$$

Integrând ecuaţia (6.70), se obţine

$$T(t)=c\cdot\exp(Ka^2t),$$

unde c este o constantă.

După această etapă, rezultă că soluţia ecuaţiei (6.64) este

$$u(x,t)=c\,X(x)\exp\,(K\,a^2t).$$

De aici rezultă că nu putem avea decât cazul $K<0$, deoarece pentru $K>0$ ar rezulta că pentru $c\neq 0$ în fiecare punct al barei temperatura ar creşte în valoare absolută peste orice limite, iar pentru $K=0$, această temperatură ar păstra în fiecare punct o valoare ce ar depinde numai de acel punct şi independentă de timp, adică am avea

$$u(x,t)=cX(x).$$

Nu putem accepta nici anularea constantei c, deoarece atunci am avea temperatura nulă în toată bara în orice moment, ceea ce contrazice condiţia iniţială (6.65).

Ţinând seama de cele de mai sus, introducem o nouă constantă $\lambda>0$, legată de constanta K prin relaţia $K=-\lambda^2$, ceea ce conduce la faptul că ecuaţia diferenţială verificată de $X(x)$ devine

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad x\in(-\infty,+\infty). \tag{6.71}$$

Ecuaţia diferenţială (6.71) are soluţia

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x. \tag{6.72}$$

Pentru constantele de integrare din (6.72) putem afirma că depind de λ, iar dacă notăm $cA = A(\lambda)$ şi $cB = B(\lambda)$, o soluţie a ecuaţiei (6.64) este

$$u(x,t;\lambda) = \Big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big)\exp(-\lambda^2a^2t), \tag{6.73}$$

ceea ce înseamnă că la fiecare $\lambda > 0$ avem câte o *undă de temperatură*.

Aplicând *principiul superpoziţiei* şi ţinând cont că λ acoperă întreaga semidreaptă pozitivă deschisă $\mathbb{R}_+^* = (0,+\infty)$, constatăm că *soluţia generală* a ecuaţiei (6.64) este

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;\lambda)\,d\lambda \tag{6.74}$$

sau

$$u(x,t) = \int_0^\infty \Big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big)\exp(-\lambda^2a^2t)\,d\lambda, \quad \forall\,(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty).$$

Condiţia iniţială (6.65) implică verificarea identităţii

$$\int_0^\infty \Big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big)d\lambda = \varphi(x),\ \ \forall\,x\in\mathbb{R}, \tag{6.75}$$

din care vom vedea că se pot deduce funcţiile $A(\lambda)$ şi $B(\lambda)$.

Într-adevăr, aceasta se va întâmpla dacă funcţia $\varphi(x)$ este astfel încât admite o *reprezentare integrală Fourier în cosinus*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(x-\alpha)d\alpha\Big)d\lambda. \tag{6.76}$$

Folosind (6.75) şi (6.76), deducem

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \Big(A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big)d\lambda = \\ &= \int_0^\infty\Big(\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\Big)\cos\lambda x\Big)d\lambda + \int_0^\infty\Big(\Big(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\Big)\sin\lambda x\Big)d\lambda,\ \ \forall\,x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{6.77}$$

Deoarece funcţiile $\cos\lambda x$ şi $\sin\lambda x$ sunt *independente funcţional*, din (6.77) rezultă

$$\begin{cases} A(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha, \\ B(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha. \end{cases} \tag{6.78}$$

Înlocuind în (6.73) expresiile (6.78) ale funcţiilor $A(\lambda)$ şi $B(\lambda)$, obţinem pentru soluţia $u(x,t;\lambda)$ următoarea expresie

$$u(x,t;\lambda) = \frac{1}{\pi}\Big(\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\Big)\exp(-\lambda^2a^2t),$$

care poate fi restrânsă la

$$u(x,t;\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\exp(-\lambda^2a^2t)\cos\lambda(x-\alpha)d\alpha. \tag{6.79}$$

Dacă introducem expresia funcţiei $u(x,t;\lambda)$ din (6.79) în (6.74), putem afirma că soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia căldurii este dată de expresia

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_0^\infty\exp(-\lambda^2a^2t)\cos\lambda(x-\alpha)\,d\lambda\Big)\varphi(\alpha)d\alpha, \tag{6.80}$$

care se poate transforma, dacă în integrala interioară, care este o *integrală de tip Poisson*[4] se face substituţia

$$\lambda\, a\sqrt{t} = u, \quad \frac{\alpha - x}{a\sqrt{t}} = v,$$

din care rezultă

$$\lambda = \frac{u}{a\sqrt{t}}, \quad d\lambda = \frac{du}{a\sqrt{t}}, \quad \lambda(\alpha - x) = uv.$$

Aşadar, integrala interioară din (6.80) are acum expresia

$$\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{\infty} \exp(-u^2)\cos uv\, du = \frac{1}{a\sqrt{t}} I(v),$$

unde am notat cu $I(v)$ integrala improprie depinzând de parametrul v

$$I(v) = \int_0^{\infty} \exp(-u^2)\cos uv\, du.$$

Funcţia $I(v)$ este derivabilă şi

$$I'(v) = -\int_0^{\infty} u\exp(-u^2)\sin uv\, du.$$

Integrând prin părţi, obţinem

$$I'(v) = \frac{1}{2}\exp(-u^2)\sin uv\Big|_0^{\infty} - \frac{v}{2}\int_0^{\infty} \exp(-u^2)\cos uv\, du,$$

din care deducem că funcţia $I(v)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$I'(v) + \frac{v}{2} I(v) = 0.$$

Astfel, pentru determinarea funcţiei $I(v)$ trebuie să integrăm o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile. Separând variabilele şi integrând, găsim

$$I(v) = I(0)\exp\Big(-\frac{v^2}{4}\Big).$$

Însă $I(0) = \displaystyle\int_0^{\infty} \exp(-u^2)du$ este *integrala Gauss–Poisson* a cărei valoare este $I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, astfel că

$$I(v) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\Big(-\frac{v^2}{4}\Big).$$

Revenind la notaţiile pentru I şi v, se găseşte

$$a\sqrt{t}\int_0^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t)\cos\lambda(x-\alpha)d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\Big(-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2 t}\Big). \tag{6.81}$$

Înlocuind (6.81) în (6.80), avem

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha)\,\exp\Big(-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2 t}\Big)d\alpha, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty). \tag{6.82}$$

Integrala (6.82) se numeşte *integrala Poisson*.

Relaţia (6.82) descrie, în condiţia iniţială dată de $\varphi(x)$, *regimul termic de răcire al barei*, imediat după aplicarea *încălzirii* la momentul $t = 0$ cuantificată de funcţia $\varphi(x)$.

Nu este clar însă ce se întâmplă la momentul iniţial $t = 0$. Este oare îndeplinită condiţia iniţială (6.65)?

[4] Poisson, Siméon Denis (1781 – 1840), matematician francez, unul din creatorii fizicii matematice şi autor al multor lucrări despre mecanica cerească, teoria elasticităţii şi calculul probabilităţilor.

Vom încerca să răspundem la întrebare amintind că am presupus că funcţia φ este mărginită pe $\mathbb{R}$, adică există $M > 0$ aşa încât să avem $|\varphi(x)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$. Vom arăta că funcţia (6.82) este de asemeni mărginită, adică satisface condiţia

$$|u(x,t)| \leq M, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty). \tag{6.83}$$

Făcând schimbarea de variabilă $\alpha = x + 2au\sqrt{t}$ în integrala (6.82), obţinem

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2au\sqrt{t}) \exp(-u^2) du, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty). \tag{6.84}$$

Integrala improprie depinzând de parametrii x şi t din (6.84) este absolut şi uniform convergentă în raport cu $t \geq 0$ şi avem

$$|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x + 2au\sqrt{t})| \exp(-u^2) du \leq M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = M.$$

Aşadar, are loc (6.83), deci funcţia $u(x,t)$ din (6.82) este mărginită.

Vom arăta acum că funcţia (6.82) este continuă pe banda semi–infinită $\Omega = [0, \ell] \times [0, \infty)$ şi satisface condiţia

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = \varphi(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{6.85}$$

adică funcţia $u(x,t)$ verifică condiţia iniţială (6.65).

Ţinând cont de integrala Gauss–Poisson, rezultă că putem scrie

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \exp(-u^2) du. \tag{6.86}$$

Din (6.82) şi (6.86), obţinem

$$|u(x,t) - \varphi(x)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x) \Big) \exp(-u^2) du \Big| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| \exp(-u^2) du.$$

Integrala improprie $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du$ este convergentă şi are valoarea $\sqrt{\pi}$ deoarece este de două ori integrala Gauss–Poisson. Prin urmare, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $k = k(\varepsilon) > 0$ astfel încât să avem

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \Big(\int_{-\infty}^{-k} \exp(-u^2) du + \int_{k}^{+\infty} \exp(-u^2) du \Big) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.87}$$

Ţinând seama de inegalitatea (6.87) şi de faptul că $|\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| \leq 2M$, obţinem

$$|u(x,t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-k}^{+k} |\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| \exp(-u^2) du.$$

Funcţia φ fiind continuă rezultă că, pentru $\varepsilon > 0$ considerat mai sus, există $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât să avem $|\varphi(x + 2au\sqrt{t}) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $t \in [0, \delta]$, pentru orice $u \in [-k, +k]$ şi orice $x \in \mathbb{R}$. Deci, avem

$$|u(x,t) - \varphi(x)| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-k}^{+k} \exp(-u^2) du < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du = \varepsilon, \ \forall\, t \in [0, \delta],$$

adică are loc (6.85).

În baza Teoremei 6.3.3 rezultă că funcţia (6.82) este unica soluţie mărginită a problemei (6.64), (6.65).

Observaţia 6.9.2. *Procedând analog ca în demonstraţia egalităţii (6.85), se poate arăta că soluţia problemei (6.64), (6.65)* ***depinde continuu de datele iniţiale****.*

Observaţia 6.9.3. *Din (6.82) se vede că temperatura iniţială $\varphi(x)$ se* ***propagă instantaneu****, ceea ce înseamnă că oricare ar fi temperatura iniţială la momentul $t = 0$, aceasta dă naştere unei temperaturi nenule în orice punct $x \in \mathbb{R}$ şi la orice moment $t > 0$. Această situaţie pare a fi imposibilă din punct de vedere fizic şi arată limitele modelului care ne–a condus la ecuaţia liniară (6.64) de propagare a căldurii. Acest neajuns se poate înlătura, spre exemplu, dacă ipoteza lui Fourier (6.1), privind conducţia căldurii, se înlocuieşte cu o altă* ***lege de propagare****.*

6.10 Problema Cauchy a ecuaţiei propagării căldurii în n dimensiuni spaţiale. Soluţie fundamentală

Să considerăm ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea în funcţia necunoscută

$$(\mathbf{x}, t) = (x_1, x_2, ..., x_n, t) \to u = u(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \quad a > 0. \tag{6.88}$$

Ecuaţia (6.88) este de tip parabolic şi mai poate fi scrisă în forma

$$u_t = a^2 \nabla^2 u, \quad a > 0, \tag{6.89}$$

.unde am notat

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \tag{6.90}$$

care este *laplacianul funcţiei* u în n dimensiuni.

În cazurile $n = 3$, $n = 2$ şi $n = 1$, ecuaţia corespunzătoare (6.89) descrie propagarea căldurii în trei, două şi respectiv o singură dimensiune, într–un mediu omogen şi în absenţa surselor interne de căldură.

Consideraţiile şi rezultatele obţinute în cazul $n = 1$, în paragraful anterior, se pot adapta pentru cazurile $n > 1$. Vom da în continuare generalizări la cazurile $n = 2$ şi $n = 3$, fără a le susţine cu argumente matematice riguroase.

Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei (6.88) este

$$\Big(\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\Big)^2 + ... + \Big(\frac{\partial \omega}{\partial x_n}\Big)^2 = 0$$

şi deci curbele caracteristice ale ecuaţiei (6.88) sunt hiperplanele $(n + 1)-$dimensionale $t = \lambda$, unde λ este o constantă reală arbitrară.

Fie funcţia reală de $2n + 2$ variabile reale $(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = (x_1, x_2, ..., x_n, t; \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \tau)$, definită prin relaţia

$$E(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}, \tau) = \frac{1}{\Big(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\Big)^n} \cdot \exp\Big(-\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)}\Big), \quad t > \tau, \tag{6.91}$$

unde $\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \xi_k)^2}$ este norma euclidiană în $\mathbb{R}^n$, iar $\exp$ este simbolul funcţiei exponenţiale cu baza numărul e.

Efectuând derivatele funcţiei (6.91), găsim

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial t} & = \Big(-\dfrac{n}{2(t-\tau)}+\dfrac{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)^2}\Big)E(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau),\\ \nabla^2 E & = \dfrac{1}{a^2}\Big(-\dfrac{n}{2(t-\tau)}+\dfrac{\|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}\|^2}{4a^2(t-\tau)^2}\Big)E(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau),\end{cases}$$

de unde rezultă că funcţia (6.91) verifică ecuaţia (6.89) oricare ar fi $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$ şi $t>\tau$.

Funcţia (6.91) se numeşte *soluţie fundamentală* a ecuaţiei căldurii în n dimensiuni spaţiale.

Pentru $n=1$ şi $\tau=0$, din (6.91) se obţine

$$E(x,t;\xi,0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\exp\Big(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big),\quad t>0 \tag{6.92}$$

şi formula (6.82) se scrie sub forma

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)E(x,t;\xi,0)d\xi,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty). \tag{6.93}$$

Dacă $g(x,t)$ este o funcţie mărginită, continuă şi *absolut integrabilă* pentru $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)$, atunci funcţia

$$v(x,t;\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\xi,\tau)E(x,t;\xi,\tau)d\xi,\quad t>\tau, \tag{6.94}$$

satisface condiţiile

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad t>\tau;\quad v(x,\tau;\tau)=g(x,\tau) \tag{6.95}$$

şi deci funcţia

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau,\quad t>\tau \tag{6.96}$$

este soluţia problemei

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x,t),\\ u(x,0)=0.\end{cases} \tag{6.97}$$

În cazul $n=2$, soluţia fundamentală a ecuaţiei căldurii este

$$E(x,y,t;\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4a^2\pi(t-\tau)}\cdot\exp\Big(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big),\quad t>\tau. \tag{6.98}$$

Soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ u(x,y,0)=\Phi(x,y)\end{cases} \tag{6.99}$$

este

$$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi,\eta)\cdot E(x,y,t;\xi,\eta,0)d\xi d\eta, \tag{6.100}$$

$\Phi(x,y)$ fiind presupusă mărginită, continuă şi absolut integrabilă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţia fundamentală a ecuaţiei propagării căldurii în cazul $n=3$ este

$$E(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,\tau)=\frac{1}{8a^3\sqrt{\pi^3(t-\tau)^3}}\cdot\exp\Big(-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}\Big),\quad t>\tau. \tag{6.101}$$

Dacă $\Phi(x,y,z)$ este o funcţie mărginită, continuă şi absolut integrabilă pe $\mathbb{R}^3$, atunci soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ u(x,y,z,0) = \Phi(x,y,z) \end{cases} \tag{6.102}$$

este dată de formula

$$u(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\xi,\eta,\zeta)\cdot E(x,y,z,t;\xi,\eta,\zeta,0)d\xi d\eta d\zeta. \tag{6.103}$$

Exerciţiul 6.10.1. *Să se integreze ecuaţia*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

ştiind că

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \varphi(x) = \begin{cases} c, & \textit{dacă} \quad x \in (\alpha,\beta) \\ 0, & \textit{dacă} \quad x \notin (\alpha,\beta), \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0.$$

Soluţie. Fiind o bară de lungime infinită, soluţia problemei este dată de

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\Big(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\Big)d\xi, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty).$$

Cunoscând funcţia $\varphi(x)$, dar şi faptul că $a=2$, deducem că soluţia problemei devine

$$u(x,t) = \frac{c}{4\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\beta}\exp\Big(-\frac{(x-\xi)^2}{16t}\Big)d\xi, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty).$$

Dacă se face substituţia $u = \dfrac{\xi - x}{4\sqrt{t}}$, se obţine

$$u(x,t) = \frac{c}{\sqrt{\pi t}}\int_{\frac{\alpha-x}{4t}}^{\frac{\beta-x}{4t}}\exp(-u^2)du, \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty).$$

Introducând notaţia

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \exp(-z^2)dz,$$

constatăm că soluţia problemei considerate este

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\Big(\Phi\Big(\frac{\beta-x}{4\sqrt{t}}\Big) - \Phi\Big(\frac{\alpha-x}{4\sqrt{t}}\Big)\Big).$$

■

6.11 Propagarea căldurii într–o bară omogenă de lungime finită, a cărei suprafaţă laterală este izolată termic şi ale cărei extremităţi schimbă căldură cu exteriorul prin convecţie

Presupunem că schimbul de căldură prin convecţie se realizează cu medii ambiante aflate la temperaturile constante u_1 şi u_2, în respectiv cele două capete ale barei. În aceste condiţii, studiul propagării căldurii în bara omogenă de lungime ℓ, a cărei suprafaţă laterală este izolată termic, se reduce la rezolvarea ecuaţiei (6.26) cu condiţia iniţială (6.28) şi cu condiţiile la limită

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) - h_1\Big(u(0,t) - u_1\Big) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) + h_2\Big(u(\ell,t) - u_2\Big) = 0, \quad t \in [0,\infty), \end{cases} \tag{6.104}$$

unde h_1 şi h_2 sunt constante pozitive care arată că extremităţile barei nu sunt termoizolate. În cazul în care $h_1 = h_2 = 0$, relaţiile (6.104) devin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = 0, \quad t \in [0,\infty) \end{cases}$$

şi arată că bara nu face schimb de căldură cu exteriorul ei.

Căutăm soluţia problemei la limită cu condiţii iniţiale (6.26), (6.28), (6.104) în forma

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t), \tag{6.105}$$

unde $v(x)$ este soluţia ecuaţiei (6.26), adică a ecuaţiei $v''(x) = 0$, care satisface condiţiile la limită (6.104). Ecuaţia $v''(x) = 0$ admite soluţia generală

$$v(x) = c_1 x + c_2. \tag{6.106}$$

Impunând funcţiei (6.106) să satisfacă condiţiile la limită (6.104), obţinem

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{h_1(u_2 - u_1)}{h_1 + h_2 + \ell h_1 h_2}, \\ c_2 = u_1 + \dfrac{c_1}{h_1} = u_1 + \dfrac{u_2 - u_1}{h_1 + h_2 + \ell h_1 h_2}. \end{cases} \tag{6.107}$$

Pentru ca funcţia $u(x,t)$ din (6.105) să fie soluţia problemei la limită cu condiţia iniţială precizată mai sus, funcţia $w(x,t)$ trebuie să satisfacă ecuaţia (6.26), condiţia iniţială

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = \phi(x) - v(x) = \tilde{\phi}(x), \tag{6.108}$$

unde $v(x)$ se determină din formulele (6.106), (6.107) şi următoarele condiţii la limită omogene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x}(0,t) - h_1 w(0,t) = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x}(\ell,t) + h_2 w(\ell,t) = 0. \end{cases} \tag{6.109}$$

Rezolvarea problemei la limită cu condiţiile (6.26), (6.108), (6.109) o vom face utilizând de asemeni *metoda separării variabilelor*.

În cele din urmă se găseşte

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Big(\frac{\mu_n}{\ell}\cos\frac{\mu_n}{\ell}x + h_1 \sin\frac{\mu_n}{\ell}x\Big) \exp\Big(-\frac{a^2\mu_n^2}{\ell^2}t\Big), \tag{6.110}$$

unde μ_n, $n \in I\!N^*$, sunt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei

$$\cot\mu = \frac{\mu^2 - \ell^2 h_1 h_2}{\ell\mu(h_1 + h_2)}, \tag{6.111}$$

iar coeficienţii A_n, obţinuţi din condiţia iniţială (6.108), folosind ortogonalitatea funcţiilor

$$X_n(x) = \frac{\mu_n}{\ell}\cos\frac{\mu_n}{\ell}x + h_1 \sin\frac{\mu_n}{\ell}x$$

pe compactul $[0,\ell]$, au expresiile

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^\ell \tilde{u}_0(x)\Big(\frac{\mu_n}{\ell}\cos\frac{\mu_n}{\ell}x + h_1\sin\frac{\mu_n}{\ell}x\Big)dx, \tag{6.112}$$

prin pătratul normei funcţiei $X_n(x)$ înţelegând numărul

$$\|X_n\|^2 = \int_0^\ell \Big(\frac{\mu_n}{\ell}\cos\frac{\mu_n}{\ell}x + h_1\sin\frac{\mu_n}{\ell}x\Big)^2 dx.$$

Din cele deduse mai sus rezultă că distribuţia temperaturii într–o bară omogenă de lungime ℓ, a cărei suprafaţă laterală este izolată termic şi ale cărei extremităţi schimbă căldură cu exteriorul prin convecţie este dată de legea

$$u(x,t) = \frac{h_1(u_2-u_1)}{h_1+h_2+\ell h_1 h_2}x + u_1 + \frac{u_2-u_1}{h_1+h_2+\ell h_1h_2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\Big(\frac{\mu_n}{\ell}\cos\frac{\mu_n}{\ell}x + h_1\sin\frac{\mu_n}{\ell}x\Big)\exp\Big(-\frac{a^2\mu_n^2}{\ell^2}t\Big),$$

unde μ_n, $n \in I\!N^*$, sunt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei (6.64), iar coeficienţii A_n au valorile date în (6.65).

Capitolul 7

Ecuaţii de tip eliptic

7.1 Ecuaţia lui Laplace şi ecuaţia lui Poisson. Soluţie fundamentală

Din (6.90), unde s–a introdus laplacianul în n dimensiuni, desprindem că operatorul diferenţial de ordinul al doilea care acţionează asupra funcţiei $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ are expresia

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \tag{7.1}$$

Operatorul (7.1) este cunoscut sub numele de *operatorul lui Laplace în n dimensiuni* .

Operatorul lui Laplace în n dimensiuni poate fi scris de asemenea ca produsul scalar al operatorului diferenţial vectorial

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{7.2}$$

cu el însuşi.

Operatorul $\boldsymbol{\nabla}$ din (7.2) este cunoscut sub numele de *operatorul lui Hamilton în n dimensiuni*, iar $\mathbf{e}_k$, unde $k \in \{1, 2, ..., n\}$, sunt versorii reperului cartezian ortogonal $Ox_1x_2...x_n$. Aşadar,

$$\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}.$$

Definiţia 7.1.1. *Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\nabla^2 u = 0 \tag{7.3}$$

se numeşte ***ecuaţia lui Laplace în n dimensiuni.***

Definiţia 7.1.2. *Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea neomogenă*

$$\nabla^2 u = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{7.4}$$

unde $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe D, se numeşte ***ecuaţia lui Poisson în n dimensiuni.***

Definiţia 7.1.3. *O funcţie reală $u(\mathbf{x})$ definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$, unde este considerată una din ecuaţiile (7.3), sau (7.4), care este continuă împreună cu derivatele sale parţiale până la ordinul al doilea şi transformă în identitate acea ecuaţie cu derivate parţiale se numeşte* ***soluţie regulată*** *a respectivei ecuaţii.*

Definiţia 7.1.4. *O soluţie regulată în $D \subset \mathbb{R}^n$ a ecuaţiei lui Laplace (7.3) se numeşte funcţie armonică.*

Se verifică imediat că funcţia

$$\left\{ E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{2-n}, & \text{dacă} \quad n > 2 \\ -\ln\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, & \text{dacă} \quad n = 2 \end{cases}\right. , \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n), \tag{7.5}$$

unde

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_n-y_n)^2},$$

este soluţie a ecuaţiei lui Laplace în n dimensiuni (7.3) pe mulţimea $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$.

Definiţia 7.1.5. *Funcţia E din (7.5) se numeşte **soluţie!fundamentală** sau **soluţie!elementară** a ecuaţiei lui Laplace în n dimensiuni.*

Observaţia 7.1.1. *Pentru a semnala existenţa şi a vectorului $\mathbf{y}$ în expresia (7.5), se obişnuieşte ca soluţia fundamentală (7.5) să se noteze prin $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$.*

Din Definiţia 7.1.5 rezultă că soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace este o funcţie armonică în orice punct din $\mathbb{E}^n \setminus \{\mathbf{y}\}$, iar în punctul $\boldsymbol{\xi}$ admite o *singularitate de tip pol* pentru $n > 2$ şi *logaritmică* pentru $n = 2$.

Spaţiul fizic îl vom nota cu $\mathbb{R}^3$ şi îl vom presupune raportat la sistemul cartezian ortonormat $Oxyz$. Mulţimea de versori ortonormaţi $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ este baza reperului ortonormat $\mathcal{R} = \{O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$, $\mathbf{i}$ fiind versorul axei Ox, $\mathbf{j}$ versorul axei Oy, iar $\mathbf{k}$ este versorul axei Oz. Planul $z = 0$ va fi asimilat cu $\mathbb{R}^2$.

În cazul $n = 3$, soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace este

$$E((x,y,z),(\xi,\eta,\zeta)) = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad (x,y,z) \neq (\xi,\eta,\zeta), \tag{7.6}$$

iar în cazul plan avem

$$E((x,y),(\xi,\eta)) = \ln\frac{1}{r} = -\ln r, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad (x,y) \neq (\xi,\eta). \tag{7.7}$$

Teorema 7.1.1. *Fie S o **hipersuprafaţă netedă**, închisă sau nu din spaţiul punctual afin euclidian $\mathbb{E}^n$ asociat spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ şi fie $\mu(\xi)$ o funcţie reală continuă definită pe S.*

Expresia

$$u(\mathbf{x}) = \int_S E(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\sigma_y, \tag{7.8}$$

unde $d\sigma_y$ este elementul de arie al hipersuprafeţei S, a cărui poziţie pe hipersuprafaţă este determinată de variabila de integrare $\mathbf{y}$, este o funcţie armonică în raport cu variabila $\mathbf{x}$ pentru toate punctele $\mathbf{x}$ ale spaţiului $\mathbb{E}^n$ nesituate pe S.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din faptul că funcţia $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este armonică în raport cu variabila $\mathbf{x}$ pentru $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ şi din faptul că operatorii de derivare parţială de ordinul al doilea $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ se aplică sub semnul integrală din membrul al doilea al relaţiei (7.8). **q.e.d.**

7.2 Proprietăţile fundamentale ale funcţiilor armonice

Teorema 7.2.1. *Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcţie armonică în $D \subset \mathbb{R}^n$, atunci la fel este şi funcţia $u(\lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h})$, unde λ este o constantă reală, C este o matrice ortogonală constantă de ordin n, iar $\mathbf{h} = (h_1, h_2, ..., h_n)$ este un vector constant din $\mathbb{R}^n$, cu proprietatea că $\lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h}$ aparţine domeniului D.*

Demonstraţie. Amintim că matricea C se numeşte ortogonală dacă coincide cu inversa sa. Prin urmare, o matrice ortogonală are proprietatea $C \cdot C^t = C^t \cdot C = I_n$, unde C^t este *transpusa matricei* C, iar I_n este matricea unitate de ordinul n, proprietate care se poate exprima matematic prin relaţiile:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot c_{jk} = \delta_{ij}; \quad \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \cdot c_{kj} = \delta_{ij}, \tag{7.9}$$

unde δ_{ij} este elementul de pe linia i şi coloana j a matricei unitate, care este egal cu 1 dacă $i = j$ şi zero dacă $i \neq j$.

Folosind regula lanţului de derivare a unei funcţii compuse şi relaţiile (7.9) deducem că au loc egalităţile

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(\mathbf{y}), \quad i \in \{1, 2, ..., n\}, \tag{7.10}$$

unde $\mathbf{y} = \lambda C\mathbf{x} + \mathbf{h}$.

Afirmaţia din teoremă este acum evidentă dacă ţinem cont de (7.3), (7.9) şi (7.10). **q.e.d.**

Teorema 7.2.2. *Dacă $u_k(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, ..., m$, sunt funcţii armonice, atunci tot astfel este şi suma finită*

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{c_k u_k}(\mathbf{x}),$$

unde c_k sunt constante reale arbitrare.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă evident din egalitatea

$$\nabla^2 \Big(\sum_{k=1}^{m} c_k u_k(\mathbf{x}) \Big) = \sum_{k=1}^{m} c_k \nabla^2 u_k(\mathbf{x})$$

şi Definiţia 7.1.4. **q.e.d.**

Teorema 7.2.3. *Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcţie armonică într–un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$, atunci funcţia*

$$v(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2-n} u\Big(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \Big)$$

este de asemenea o funcţie armonică în toate punctele unde ea este definită.

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă prin verificare directă, calculând derivatele parţiale nemixte de ordinul al doilea ale funcţiei $v(\mathbf{x})$ şi ţinând cont de faptul că $u(\mathbf{x})$ este funcţie armonică în D. **q.e.d.**

În cazul în care domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$ conţine punctul de la infinit, definiţia funcţiei armonice necesită unele menţionări suplimentare deoarece noţiunea de derivată în punctul de la infinit nu mai are sens. Pentru aceasta, este nevoie de precizat ce se înţelege prin *vecinătate a punctului de la infinit*.

Definiţia 7.2.1. *Prin* ***vecinătatea punctului de la infinit*** *în* $\mathbb{R}^n$ *se înţelege exteriorul bilei închise de rază* R *cu centrul în origine.*

Exteriorul bilei închise de rază R cu centrul în origine este mulţimea punctelor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ caracterizată de inegalitatea $\|\mathbf{x}\| > R$.

Definiţia 7.2.2. *Se spune că funcţia* $u(\mathbf{x})$ *este* ***armonică în punctul de la infinit*** *sau mai precis, într–o vecinătate a punctului de la infinit, când funcţia*

$$v(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y}\|^{2-n} u\Big(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}\Big) \tag{7.11}$$

este armonică în sens obişnuit într–o vecinătate a punctului $\mathbf{y} = 0$.

Expresia (7.11) are sens pentru toţi $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, iar valoarea funcţiei $v(\mathbf{y})$ în punctul $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ este definită ca fiind limita $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\mathbf{0}} v(\mathbf{y})$.

Prin transformarea $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^\mathbf{2}}$ a variabilei $\mathbf{y}$, rezultă formula

$$u(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{2-n} v\Big(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}\Big).$$

Definiţia 7.2.3. *Printr–o* ***soluţie regulată la infinit*** $u(\mathbf{x})$ *a ecuaţiei lui Laplace se înţelege o funcţie care este armonică peste tot într–o vecinătate a punctului de la infinit, cu excepţia punctului de la infinit însuşi şi care rămâne mărginită pentru* $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ *în cazul* $n = 2$ *şi tinde la zero nu mai încet decât tinde la zero* $\|\mathbf{x}\|^{2-n}$ *în cazul* $n > 2$.

Fie D un domeniu din spaţiul afin $I\!E^n$ care are o frontieră S suficient de netedă şi fie $u(\mathbf{x})$ şi $v(\mathbf{x})$ două funcţii reale armonice pe D, continue în $D \cup S$ împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întâi.

Integrând peste domeniul D identităţile

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(v\frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big) = 0$$

şi folosind formula integrală Gauss–Ostrogradski [8], obţinem corespunzător formulele

$$\int_S v(\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x_i}}(\mathbf{x})\mathbf{d}\tau_\mathbf{x} \tag{7.12}$$

şi

$$\int_S \Big(v(\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} - u(\mathbf{y})\frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}\Big) d\sigma_y = 0 \tag{7.13}$$

În formulele (7.12) şi (7.13), ca şi în cele ce urmează, prin $\mathbf{n}_y$ înţelegem *vectorul unitar al normalei exterioare* în punctul $\mathbf{y}$ al hipersuprafeţei S, iar $\dfrac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}$ este derivata după direcţia $\mathbf{n}_y$ a funcţiei $u(\mathbf{y})$ în punctul $\mathbf{y}$ care, după cum se ştie, este egală cu produsul scalar dintre gradientul funcţiei u în punctul $\mathbf{y}$ şi versorul normalei exterioare $\mathbf{n}_y$, adică

$$\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = (\boldsymbol{\nabla} u)(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_k}(\mathbf{y}) n_{yk}(\mathbf{y}).$$

De asemenea, $d\sigma_y$ este *elementul de arie* al hipersuprafeţei S în punctul curent al ei $\mathbf{y}$, iar $d\tau_x$ este *elementul de volum* în punctul $\mathbf{x} \in D$ care, după cum se ştie este $d\tau_x = dx_1 dx_2 \cdot ... \cdot dx_n$, unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Pentru ca formulele (7.12) şi (7.13) să rămână valabile în cazul în care D conţine punctul de la infinit, situaţie care se întâmplă dacă D este *mulţime nemărginită*, este natural să cerem ca integranţii din aceste formule să fie *funcţii absolut integrabile*, sau *sumabile* în cazul când expresiile din cei doi membri ai formulelor (7.12) şi (7.13) sunt înţelese ca *integrale Lebesgue*.

Formulele (7.12) şi (7.13) fac posibilă stabilirea încă a unui număr de proprietăţi elementare ale funcţiilor armonice.

Teorema 7.2.4. (**Teorema de unicitate a funcţiilor armonice**) *Dacă funcţia $u(\mathbf{x})$ este armonică în domeniul D, continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele parţiale de ordinul întâi ale sale şi egală cu zero pe frontiera S a domeniului D, atunci $u(\mathbf{x}) = 0$ peste tot în $D \cup S$.*

Demonstraţie. Proprietatea indicată rezultă din egalitatea (7.12) dacă facem în ea $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$. Într–adevăr, deoarece $u(\mathbf{y}) = 0$ pentru $\mathbf{y} \in S$, formula (7.12) implică

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x = \int_S u(\mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y \tag{7.14}$$

şi prin urmare

$$\sum_{i=1}^{n} \int_D \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\tau_x = 0.$$

În consecinţă, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $\mathbf{x} \in D$, adică $u(\mathbf{x}) = \text{const.}$ pentru toţi $\mathbf{x} \in D$. Acum, deoarece $u(\mathbf{y}) = 0$ pentru $\mathbf{y} \in S$, în baza continuităţii funcţiei $u(\mathbf{x})$ în domeniul închis $D \cup S$, rezultă că $u(\mathbf{x}) = 0$ pentru toţi $\mathbf{x} \in D \cup S$. **q.e.d.**

Teorema 7.2.5. *Fie $u(\mathbf{x})$ o funcţie armonică în domeniul D şi continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele ei parţiale de ordinul întâi.*

Dacă derivata pe direcţia normală $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y})$ este egală cu zero pe frontiera S a domeniului D, atunci $u(\mathbf{x}) = \text{const.}$ pentru toţi $\mathbf{x} \in D$.

Demonstraţie. Această proprietate a funcţiilor armonice se demonstrează exact în acelaşi mod ca teorema precedentă. Pentru a finaliza demonstraţia este suficient ca în egalitatea (7.14) să luăm în consideraţie faptul că $\dfrac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = 0$ pentru toţi $\mathbf{y} \in S$. **q.e.d.**

Teorema 7.2.6. *Dacă $u(\mathbf{x})$ este funcţie armonică în domeniul D, continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele ei parţiale de ordinul întâi, atunci integrala pe hipersuprafaţa S a derivatei pe direcţia normală $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_y}(\mathbf{y})$ este egală cu zero.*

Demonstraţie. Într-adevăr, punând în (7.12), $v(\mathbf{x}) = 1$ pentru toţi $\mathbf{x} \in D$, obţinem

$$\int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} d\sigma_y = 0. \tag{7.15}$$

q.e.d.

7.3 Formule de reprezentare integrală

7.3.1 Formule de reprezentare integrală ale funcţiilor de clasă C^1 şi C^2

Aşa numitele *formule de reprezentare integrală* ale funcţiilor de clasă C^1 şi C^2 pe un domeniu $D \subset I\!\!E^n$ se obţin prin introducerea soluţiei fundamentale $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ în *prima* şi *a doua identitate a lui Green*, prezentate pentru cazul $n = 3$ în relaţiile (3.86) şi respectiv (3.87), bineînţeles cu luarea în consideraţie a Observaţiei 3.8.1.

Deoarece soluţia fundamentală conţine de fapt $2n$ variabile, va trebui să precizăm care din ele sunt fixe şi care sunt variabile, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$. În cele ce urmează vom presupune $\mathbf{x}$ fix, iar $\mathbf{y}$ variabil în domeniul $D \subset I\!\!E^n$, adică $\mathbf{y} \in D$. Poziţia lui $\mathbf{x}$ se poate determina în funcţie de domeniul D :

- punctul $\mathbf{x}$ poate să aparţină lui D;
- $\mathbf{x}$ poate să fie situat pe frontiera lui D, adică $\mathbf{x} \in \partial D = S$;
- punctul $\mathbf{x}$ se poate afla în exteriorul lui D.

Vom presupune că D este un domeniu mărginit.

Având în vedere forma soluţiei fundamentale, vom constata că în formulele de reprezentare integrală, pe care urmează să le demonstrăm, apar integrale improprii de forma

$$I(\mathbf{x}) = \int_D \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}, \quad \mathbf{x} \in D, \tag{7.16}$$

unde α este un număr real, $f(\mathbf{y})$ este o funcţie definită, mărginită şi integrabilă în domeniul mărginit D, iar $d\tau_y$ este elementul de volum al spaţiului afin $I\!\!E^n$.

Lema 7.3.1. *Dacă $f(\mathbf{y})$ este o funcţie definită, mărginită şi integrabilă în domeniul mărginit D, iar $\alpha < n$, atunci integrala improprie (7.16) este convergentă.*

Demonstraţie. Deoarece punctul fix $\mathbf{x}$ aparţine domeniului D, îl putem izola în bila deschisă $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ centrată în $\mathbf{x}$, de rază $\varepsilon > 0$, complet inclusă în D şi vom putea scrie $I(\mathbf{x}) = I_\varepsilon(\mathbf{x}) + I_1(\mathbf{x})$, unde s–a notat

$$I_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x},\varepsilon)} \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}, \quad I_1(\mathbf{x}) = \int_{D \setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)} \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha}. \tag{7.17}$$

Deoarece integrantul care apare în $I_1(\mathbf{x})$ este o funcţie integrabilă în $D \setminus B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, este suficient să găsim în ce condiţii este convergentă integrala $I_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Pentru aceasta, efectuăm schimbarea de variabilă $\mathbf{y} = \mathbf{x} + r\mathbf{s}$, unde $0 \leq r \leq \varepsilon$, iar $\mathbf{s}$ este un versor arbitrar din $\mathbb{R}^n$, ceea ce înseamnă că $\|\mathbf{s}\| = 1$. De asemenea, putem afirma că mulţimea versorilor $\mathbf{s}$ constituie sfera Σ, de rază unitate cu centrul în origine, denumită pe scurt *sfera unitate* şi notată cu $\Sigma(\mathbf{0}, 1)$.

Deoarece elementul de volum în $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ este $d\tau_y = r^{n-1} dr d\omega_n$, unde $d\omega_n$ este elementul de arie al sferei $\Sigma(\mathbf{0}, 1)$, iar norma vectorului $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ este egală cu raza ε a bilei $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$, rezultă că integrala improprie $I_\varepsilon(\mathbf{x})$ se prezintă ca o iteraţie de două integrale, una simplă, pe sfera unitate $\Sigma(\mathbf{0}, 1)$, şi cealaltă o integrală improprie de speţa a doua, şi anume

$$I_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x},\varepsilon)} \frac{f(\mathbf{y}) d\tau_y}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha} = \int_0^\varepsilon r^{n-\alpha-1} dr \int_{\Sigma(\mathbf{0},1)} f(\mathbf{x} + r\mathbf{s}) \mathbf{d}\omega_\mathbf{n}.$$

$$\int_0^a r^{n-\alpha-1}dr, \quad a>0, \; 8$$

$I_\varepsilon(\mathbf{x})$ $\varepsilon \to 0,$ $n-\alpha-1>-1,$ $\alpha<n.$

Teorema 7.3.1. **(Formula de reprezentare integrală a funcţiilor de clasă C^1)** *Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcţie de clasă C^1 în D şi de clasă C^0 pe închiderea $\overline{D}$ a domeniului D de frontieră S, atunci are loc identitatea*

$$p\,\omega_n u(\mathbf{x}) = \int_D \boldsymbol{\nabla}_y E(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot(\boldsymbol{\nabla}u)(\mathbf{y})d\tau_y - \int_S u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y, \tag{7.18}$$

unde:

- $\omega_n = \dfrac{1}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)}2\pi^{n/2}$ *este **aria sferei unitate** din $\mathbb{E}^n$;*
- $\Gamma(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}e^{-x}dx$ *este **funcţia gamma a lui Euler** ;*
- $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *este soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace;*
- $\dfrac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}$ *este derivata pe direcţia normalei exterioare $\mathbf{n}_y$ a soluţiei fundamentale $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$;*
- p *este **funcţia!în scară** definită în modul următor:*

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1, & \textit{dacă} \quad \mathbf{x}\in D; \\ +\dfrac{1}{2}, & \textit{dacă} \quad \mathbf{x}\in \partial D = S; \\ 0, & \textit{dacă} \quad \mathbf{x}\notin \overline{D}, \qquad \textit{adică} \quad \mathbf{x}\in \mathbb{E}^n\setminus\overline{D}. \end{cases} \tag{7.19}$$

Demonstraţie. Amintim întâi că prima identitate a lui Green scrisă pentru un domeniu $D\subset\mathbb{E}^n$, de frontieră S, se obţine formal din (3.86) dacă considerăm că integrala de volum este pe domeniul $n-$dimensional D, iar integrala de suprafaţă este o integrală pe hipersuprafaţa S, adică

$$\int_D u(\mathbf{y})(\nabla^2 v)(\mathbf{y})d\tau_y + \int_D \Big((\boldsymbol{\nabla}u)(\mathbf{y})\Big)\cdot\Big((\boldsymbol{\nabla}v)(\mathbf{y})\Big)d\tau_y = \int_S u(\mathbf{x})\frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y. \tag{7.20}$$

Dacă presupunem că $\mathbf{x}\in\mathbb{E}^n\setminus\overline{D}$, atunci $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\neq 0$ şi deci $\nabla_y^2 E(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \nabla_x^2 E(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$, oricare ar fi $\mathbf{x}$ în această situaţie. Deoarece $E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\in C^2(D)$, dacă $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, se poate aplica prima identitate a lui Green (7.20) în ipoteza $v(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, aici $\mathbf{x}$ considerându–se fixat în $\mathbb{E}^n\setminus\overline{D}$. Prima integrală din (7.20) va dispare şi se obţine evident formula (7.18), cu $p=0$.

Dacă însă $\mathbf{x}\in D$, formula (7.20) nu se mai poate aplica deoarece $v(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ nu este de clasă $C^2(D)$.

Pentru a elimina această dificultate, vom considera din nou bila deschisă care a fost introdusă în demonstraţia Lemei 7.3.1. În domeniul $D\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)$ se poate aplica formula în cauză, deoarece $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\neq 0$, obţinându–se astfel identitatea

$$\int_{D\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)} u(\mathbf{y})\nabla_y^2 E(\mathbf{x}-\mathbf{y})d\tau_y + \int_{D\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)}\Big((\boldsymbol{\nabla}u)(\mathbf{y})\Big)\cdot\Big((\boldsymbol{\nabla}_y E)(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)d\tau_y = \int_{\partial(D\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon))} u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y,$$

care, deoarece $\nabla_y^2 E(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0$ şi deoarece $\partial(D\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)) = \partial D\cup\partial B(\mathbf{x},\varepsilon) = S\cup\Sigma$, se va putea scrie în forma

$$-\int_\Sigma u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y = \int_{D\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)}\Big((\boldsymbol{\nabla}u)(\mathbf{y})\Big)\cdot\Big((\boldsymbol{\nabla}_y E)(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)d\tau_y - \int_S u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y, \tag{7.21}$$

unde am ţinut cont că versorul normala exterioară $\mathbf{n}_y$ în punctul $\mathbf{y} \in \Sigma$ este dirijat spre centrul sferei Σ, ceea ce înseamnă că vom avea $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$. Având în vedere expresia (7.5) a soluţiei fundamentale $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$, vom avea de asemenea

$$\frac{\partial}{\partial r}E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{n}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^{1-n} = -\frac{1}{n}\varepsilon^{1-n},$$

deoarece $\mathbf{y} \in \Sigma$ şi deci $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \varepsilon$. Vom găsi

$$\int_{\Sigma} u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y = -\int_{\Sigma(\mathbf{0},1)} u(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{s})d\sigma_s, \tag{7.22}$$

unde $\Sigma(\mathbf{0},1)$ este sfera unitate, având elementele notate cu $\mathbf{s}$, iar $d\sigma_s$ este elementul de arie în punctul $\mathbf{s}$ al acestei sfere.

Înlocuind integrala din (7.22) în identitatea (7.21), după trecere la limtă pentru $\varepsilon \to 0$, găsim formula (7.18), în care $p(\mathbf{x}) = +1$, deoarece $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\Big(D \setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)\Big) = D$ şi $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int_{\Sigma(\mathbf{0},1)} u(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{s})d\sigma_s = u(\mathbf{x})\omega_n$.

Dacă $\mathbf{x} \in \partial D = S$, vom extrage din D o semibilă $B'(\mathbf{x},\varepsilon)$, cu centrul în $\mathbf{x}$ şi rază $\varepsilon > 0$.

Raţionamentul anterior se aplică în întregime, singura diferenţă constând în faptul că în loc de integralele care apar în (7.22), care sunt calculate pe sfera Σ cu centrul în $\mathbf{x}$ şi rază ε vor apărea aceleaşi integrale, însă calculate pe o emisferă.

Notând cu Σ' această emisferă, vom avea:

$$-\int_{\Sigma'} u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y = \int_{D\setminus B'(\mathbf{x},\varepsilon)}\Big((\nabla u)(\mathbf{y})\Big)\cdot\Big((\nabla_y E)(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)d\tau_y - \int_S u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y; \tag{7.23}$$

$$\int_{\Sigma'} u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y = -\int_{\Sigma'(\mathbf{0},1)} u(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{s})d\sigma_s; \tag{7.24}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma'} u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Sigma'(\mathbf{0},1)} u(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{s})d\sigma_s = -\frac{1}{2}\omega_n u(\mathbf{x}). \tag{7.25}$$

unde $\Sigma'(\mathbf{0},1)$ este *emisfera unitate*, a cărei arie este $\dfrac{1}{2}\omega_n$

Analizând acest de al treilea procedeu şi ţinând cont de (7.24) şi (7.25), după trecerea la limită pentru $\varepsilon \to 0$ în (7.23), constatăm că (7.18) este adevărată şi în cazul $\mathbf{x} \in S = \partial D$. **q.e.d.**

Teorema 7.3.2. **(Formula de reprezentare integrală a funcţiilor de clasă C^2)** *Dacă $u(\mathbf{x})$ este o funcţie de clasă C^2 în D şi de clasă $C^1(\overline{D})$ şi S este frontiera lui D, atunci are loc identitatea*

$$p\,\omega_n u(\mathbf{x}) = -\int_S u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y + \int_S E(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y - \int_D E(\mathbf{x},\mathbf{y})(\nabla^2 u)(\mathbf{y})d\tau_y, \tag{7.26}$$

în care p este funcţia în scară definită prin (7.19).

Demonstraţie. Scriind identitatea lui Green (7.20), în care $v(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\mathbf{y})$, iar $u(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x},\mathbf{y})$, obţinem relaţia

$$\int_D E(\mathbf{x},\mathbf{y})(\nabla^2 u)(\mathbf{y})d\tau_y + \int_D \Big((\nabla_y)E(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)\cdot\Big((\nabla u)(\mathbf{y})\Big)d\tau_y = \int_S E(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y. \tag{7.27}$$

După cum ne convingem imediat, egalitatea (7.27) are sens căci punând aici $D \setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)$ în loc de D şi făcând apoi $\varepsilon \to 0$, obţinem o relaţie din care putem extrage termenul $\displaystyle\int_D \Big((\nabla_y)E(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big)\cdot\Big((\nabla u)(\mathbf{y})\Big)d\tau_y$ care, înlocuit în (7.18), conduce exact la formula (7.26). **q.e.d.**

7.3.2 Formulă de reprezentare integrală a unei funcţii armonice

Teorema 7.3.3. *Pentru o funcţie armonică într–un domeniu D de frontieră S, continuă în $D \cup S$ împreună cu derivatele parţiale de ordinul întâi, are loc* ***formula de reprezentare integrală***

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n}\int_S E(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y - \frac{1}{\omega_n}\int_S u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y. \tag{7.28}$$

$\omega_n = \dfrac{1}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)}2\pi^{n/2}$ este aria sferei de rază unitate din $I\!E^n$, iar Γ este **funcţia Gamma a lui Euler.**

Demonstraţie. Pentru a deduce formula (7.28), alegem un punct arbitrar $\mathbf{x} \in D$ şi considerăm bila închisă $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \le \varepsilon$ de rază $\varepsilon > 0$, situată în întregime în D. Notăm cu D_ε partea din domeniul D care rămâne în afara bilei. Aplicăm formula (7.13) domeniului D_ε, a cărui frontieră este reuniunea dintre frontiera S a lui D şi frontiera bilei, de ecuaţia $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \varepsilon$. În locul funcţiei $v(\mathbf{y})$ vom considera $v(\mathbf{y}) = E(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Obţinem

$$\int_S \Big(E(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} - u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)d\sigma_y = \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon}\Big(E(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} - u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)d\sigma_y. \tag{7.29}$$

Celui de al doilea termen din membrul doi îi adunăm şi scădem termenul $u(\mathbf{x})\dfrac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}$ şi astfel membrul doi al egalităţii (7.29) devine

$$\int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon} E(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y - \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon}\Big(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})\Big)\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)d\sigma_y - u(\mathbf{x})\int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon}\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y. \tag{7.30}$$

Pe de altă parte, pe sfera $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \varepsilon$, avem

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)\varepsilon^{n-2}} & \text{pentru} \quad n > 2, \\ -\ln\varepsilon & \text{pentru} \quad n = 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\varepsilon^{n-1}} & \text{pentru} \quad n > 2, \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} & \text{pentru} \quad n = 2, \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon}\Big(u(\mathbf{y})-u(\mathbf{x})\Big)\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}\Big)d\sigma_y = 0,$$

$$\int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\varepsilon}\frac{d\sigma_y}{\varepsilon^{n-1}} = \omega_n.$$

Prin urmare, în baza relaţiei (7.15), prin trecere la limită pentru $\varepsilon \to 0$ în egalitatea (7.29) în care se ţine cont de (7.30), se obţine reprezentarea integrală (7.28). **q.e.d.**

Observaţia 7.3.1. *Formula (7.28), de reprezentare integrală a unei funcţii armonice în $D \subset I\!E^n$, se poate obţine direct din (7.26) dacă se ţine cont de faptul că funcţia $u(\mathbf{x})$ este armonică în D.*

7.4 Formule de medie ale unei funcţii armonice

Teorema 7.4.1. *Dacă $\varphi(\mathbf{x})$ este o funcţie armonică pe un domeniu $D \subset I\!\!E^n$, atunci valoarea sa într–un punct $\mathbf{x} \in D$ este egală cu media valorilor luate pe frontiera unei bile închise arbitrare cu centrul în $\mathbf{x}$ şi rază R inclusă în D, adică*

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=R} u(\mathbf{y}) d\sigma_y. \tag{7.31}$$

Demonstraţie. Într-adevăr, deoarece pe sfera $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = R$ avem egalităţile

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-2)R^{n-2}} & \text{pentru} \quad n > 2, \\ -\ln R & \text{pentru} \quad n = 2, \end{cases}$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} = \begin{cases} -\dfrac{1}{R^{n-1}} & \text{pentru} \quad n > 2, \\ -\dfrac{1}{R} & \text{pentru} \quad n = 2, \end{cases}$$

este uşor de văzut că, în baza formulei (7.15), din formula de reprezentare integrală (7.28), obţinem (7.31).

Scriind formula (7.31) pentru sfera $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| = \rho \leq R$ în forma

$$\rho^{n-1} u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=\rho} u(\mathbf{y}) d\sigma_y$$

şi integrând această egalitate în raport cu ρ pe compactul $[0, R]$, obţinem

$$u(\mathbf{x}) = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|\leq R} u(\mathbf{y}) d\tau_y, \tag{7.32}$$

unde $d\tau_y$ este elementul de volum a cărui locaţie în D este specificată prin variabila $\mathbf{y}$, iar $\dfrac{\omega_n R^n}{n}$ este volumul bilei deschise $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < R$.

Formulele (7.32) şi (7.31) sunt cunoscute ca **formule de medie ale unei funcţii armonice** pentru o bilă deschisă şi respectiv pentru frontiera acesteia. **q.e.d.**

Folosind coordonatele polare în plan şi în spaţiu, formula de medie (7.31) se poate rescrie în respectiv formele:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_1 + R\cos\theta, x_2 + R\sin\theta) d\theta, \tag{7.33}$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} u(x_1 + R\sin\theta\cos\psi, x_2 + R\sin\theta\sin\psi, x_3 + R\cos\theta) \sin\theta d\psi. \tag{7.34}$$

7.5 Principiu de extrem pentru funcţii armonice

Considerăm o funcţie $u(\mathbf{x})$, armonică în domeniul $D \subset \mathbb{R}^n$, şi notăm cu m şi M marginile inferioară şi superioară ale valorilor funcţiei respective.

Din egalitatea (7.32) cu uşurinţă se poate stabili următoarea proprietate cunoscută sub numele de **principiu de extrem pentru funcţii armonice**.

Teorema 7.5.1. *O funcţie $u(\mathbf{x})$, armonică pe un domeniu D, nu poate lua valorile sale maxime sau minime în puncte ale domeniului D decât dacă se reduce la o constantă.*

Demonstraţie. Când $M = +\infty$ sau $m = -\infty$ afirmaţia din teoremă este evidentă deoarece funcţia $u(\mathbf{x})$ poate lua numai valori finite în orice punct al domeniului D. Presupunem atunci că $M \neq +\infty$ şi că există un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ în care funcţia $u(\mathbf{x})$ ia valoarea sa maximă pe D,

$$u(\mathbf{x}_0) \geq u(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in D. \tag{7.35}$$

Dacă B_0 este o bilă cu centrul în $\mathbf{x}_0$ şi rază a_0 astfel aleasă încât B_0 şi frontiera sa S_0 să fie incluse în D, atunci din (7.31) şi (7.35) rezultă

$$u(\mathbf{x}_0) \geq \frac{1}{\omega_n a_0^{n-1}} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=a_0} u(\mathbf{y}) d\sigma_y. \tag{7.36}$$

Dacă pe sfera $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = a_0$ există un punct $\mathbf{x}_1$ în care $u(\mathbf{x}_1) < u(\mathbf{x}_0)$, datorită continuităţii funcţiei $u(\mathbf{x})$, există o vecinătate V_1 a punctului $\mathbf{x}_1$ pentru care $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}_0)$ şi inegalitatea (7.36) devine strictă

$$u(\mathbf{x}_0) > \frac{1}{\omega_n a_0^{n-1}} \int_{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|=a_0} u(\mathbf{y}) d\sigma_y, \tag{7.37}$$

ceea ce contrazice egalitatea (7.31). Rezultă $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0)$, $\forall\, \mathbf{x} \in S_0$, şi aceasta pentru orice sferă care îndeplineşte condiţiile enunţate, în particular pentru sferele cu centrul în $\mathbf{x}_0$ şi cu rază $a < a_0$. Deci

$$u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0), \quad \forall\, \mathbf{x} \in \overline{B}_0 = B_0 \cup S_0.$$

Valoarea maximă $u(\mathbf{u}_0)$ fiind egală cu $u(\mathbf{x}_1)$, $\forall\, \mathbf{x}_1 \in S_0$, repetând raţionamentul pentru o bilă B_1 cu centrul în $\mathbf{x}_1$ aleasă astfel ca $B_1 \cup S_1 = \overline{B}_1 \subset D$, rezultă că $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_1) = u(\mathbf{x}_0)$, $\forall\, \mathbf{x} \in B_1$ etc. Fie $\mathbf{y} \in D$ arbitrar. Cum D este mulţime conexă, există o linie poligonală L, de lungime finită, care uneşte $\mathbf{x}_0$ cu $\mathbf{y}$. Luând $\mathbf{x}_1 = S_0 \cap L$, $\mathbf{x}_2 = S_1 \cap L$ etc., după un număr finit de paşi obţinem o bilă B_n astfel încât $\mathbf{y} \in \overline{B}_n$, deci $u(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}_0)$, $\forall\, \mathbf{y} \in D$. În concluzie, dacă $u(\mathbf{x})$, armonică pe D, ia într–un punct $\mathbf{x}_0 \in D$ valoarea sa maximă, $u(\mathbf{x})$ se reduce la o constantă pe D.

Aşadar, din raţionamentul dezvoltat mai sus, rezultă că punctul de extrem $\mathbf{u}_0$ nu poate aparţine interiorului domeniului D, şi în consecinţă $\mathbf{u}_0 \in S_0$. **q.e.d.**

condiţie la frontieră, atunci diferenţa lor $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})$ este egală cu zero pe frontiera S a domeniului D, şi prin urmare, în baza principiului de extrem pentru o funcţie armonică, $w(\mathbf{x}) = 0$, adică $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ pretutindeni în $D \cup S$.

7.6 Problema Dirichlet şi problema Neumann

Când se deduc anumite ecuaţii cu derivate parţiale din legi generale care guvernează fenomene ale naturii, apar în mod natural condiţii suplimentare impuse soluţiilor căutate. Demonstrarea *existenţei* şi *unicităţii* soluţiilor care satisfac condiţii suplimentare specifice (la limită sau pe frontieră şi eventual iniţiale) joacă un rol important în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Dacă atunci când au loc mici variaţii ale datelor conţinute atât în ecuaţii cât şi în condiţiile suplimentare impuse soluţiilor se produc mici variaţii ale soluţiilor care satisfac ecuaţiile şi condiţiile modificate spunem că soluţiile sunt *stabile* sau că *problemele sunt bine puse* (*corect puse*). Altminteri, problemele în chestiune se zic *probleme puse impropriu* sau *probleme incorect puse*.

Este bine de menţionat că condiţiile problemelor care trebuiesc să fie satisfăcute de către soluţiile căutate depind de tipul ecuaţiei cu derivate parţiale considerate.

Să formulăm acum o problemă la limită a cărei corectitudine se va demonstra ulterior.

Presupunem că S, frontiera unui domeniu mărginit D din spaţiul afin $n-$dimensional $\mathbb{E}^n$, asociat spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$, este o *hipersuprafaţă netedă* $(n-1)-$*dimensională*.

În cele ce urmează, prin *suprafaţă* în $I\!\!E^n$ vom înţelege o hipersuprafaţă $(n-1)-$dimensională de acest tip. Preferăm acest stil de prezentare, general la prima vedere, în dorinţa de a prinde simultan cele două cazuri întâlnite cel mai frecvent în practica curentă. Primul caz este acela în care $n = 3,$ hipersuprafaţa fiind acum suprafaţa obişnuită din spaţiul euclidian tridimensional, iar cel de al doilea este cel în care $n = 2,$ când hipersuprafaţa este înlocuită de o curbă plană.

Să formulăm următoarea problemă: *să se determine acea soluţie $u(\mathbf{x})$ a ecuaţiei (7.3) care să fie regulată în domeniul $D,$ continuă în regiunea închisă $D \cup S$ şi care să satisfacă condiţia la limită*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y}); \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{y} \in S, \tag{7.38}$$

unde φ este o funcţie continuă dată definită pe $S.$

Problema astfel formulată este cunoscută sub numele *prima problemă la limită fundamentală* sau *problema Dirichlet*.

Problema Neumann constă în determinarea unei funcţii $u(\mathbf{x}),$ armonică pe domeniul $D \subset I\!\!E^n,$ pentru care sunt date valorile derivatei sale după direcţia versorului $\mathbf{n}$ al normalei exterioare

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big)(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in S, \tag{7.39}$$

în toate punctele $\mathbf{x}$ aparţinând frontierei S a domeniului $D,$ în care normala $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ este continuă. Funcţia $\psi(\mathbf{x})$ este considerată cunoscută, dată şi este o funcţie continuă.

Problema Neumann pentru ecuaţia lui Laplace este cunoescută şi sub numele de *a doua problemă la limită* sau *a doua problemă fundamentală* .

Aceste două probleme, referindu–se la un domeniu mărginit, se numesc *probleme interioare*. Următoarele probleme, referitoare la domenii nemărginite, se numesc *probleme exterioare* .

Fie D un domeniu nemărginit şi S frontiera sa formată din una sau mai multe suprafeţe cu normala $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ continuă pe porţiuni. Dăm ca exemplu următoarele domenii nemărginite din $I\!\!E^3,$ spaţiul afin asociat spaţiului liniar $\mathbb{R}^3,$ în care s–a ales reperul cartezian ortogonal $Oxyz$:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 > R^2\}, \;\; R > 0;\\ D_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\};\\ D_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 > R^2, \; z > 0\}, \;\; R > 0;\\ D_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-2)^2 + y^2 > 1, \; x > 0\}. \end{aligned}$$

Mulţimea D_1 reprezintă exteriorul bilei închise cu centrul în origine de rază R şi este o mulţime deschisă, conexă, dar nemărginită. Domeniul D_2 este semispaţiul superior. Mulţimea D_3 este semispaţiul superior din care s–a înlăturat jumătatea superioară din cilindrul circular închis, de rază $R,$ cu axa de rotaţie axa $Oz.$ Ultima mulţime este situată în semispaţiul $x > 0$ dar şi în exteriorul cilindrului cu generatoarele paralele cu $Oz,$ având curba directoare cercul de rază 1 şi centrul în punctul $C(2, 0, 0)$ situat în planul $Oxy.$ Domeniile $D_2,$ D_3 şi D_4 sunt de asemeni nemărginite.

Problema lui Dirichlet pentru un domeniu nemărginit $D \subset I\!\!E^n$ este următoarea: să se determine o funcţie $u(\mathbf{x}),$ armonică pe $D,$ cu următoarele condiţii:

$$u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \;\; \forall\, \mathbf{x} \in S; \qquad \lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0,$$

unde $\varphi(\mathbf{x})$ este o funcţie dată, definită pe frontiera S a domeniului $D.$

Problema Neumann pentru un domeniu nemărginit $D \subset I\!\!E^n$ constă în determinarea unei funcţii $u(\mathbf{x}),$ armonică pe $D,$ date fiind valorile derivatei $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x})$ în toate punctele $\mathbf{x} \in S$ în care $\mathbf{n}$ este continuă, iar $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0.$

Teorema 7.6.1. *Soluţia problemei Dirichlet este unică, atât în cazul domeniilor mărginite cât şi în cazul domeniilor nemărginite.*

Soluţia problemei Neumann pentru domenii mărginite este determinată în afara unei constante aditive.

În cazul domeniilor nemărginite, soluţia $u(\mathbf{x})$ a problemei Neumann care satisface condiţiile suplimentare

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{\|\mathbf{x}\|^{\lambda}}, \quad \max\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x})\right|, ..., \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right|\right\} \leq \frac{K}{\|\mathbf{x}\|^{1+\lambda}}, \quad \|\mathbf{x}\| > R_0,$$

unde C, K, R_0, λ sunt constante strict pozitive date şi $\lambda > \dfrac{n-2}{2}$, este unică.

Demonstraţie. Să presupunem că există două soluţii ale problemei Dirichlet, $u_1(\mathbf{x})$ şi $u_2(\mathbf{x})$

$$\nabla^2 u_1(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla^2 u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \text{pe } D,$$
$$u_1(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad u_2(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x} \in S.$$

Diferenţa lor $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})$ va fi o funcţie armonică pe D, nulă pe frontiera S. În plus, în cazul când D este domeniu nemărginit

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0.$$

În aceste condiţii, funcţia $u(\mathbf{x})$ este nulă pe D. Într-adevăr, dacă ar lua valori strict pozitive în puncte ale domeniului D, ar rezulta că $u(\mathbf{x})$ ar lua valoarea sa maximă într–un punct din D, fapt care contrazice Teorema 7.5.1. Pentru motive similare, $u(\mathbf{x})$ nu poate lua valori strict negative pe D. Cum $u(\mathbf{x}) = 0$ pe D, rezultă $u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x})$ şi unicitatea soluţiei problemei Dirichlet este dovedită.

Să considerăm acum problema Neumann pentru un domeniu mărginit D de frontieră S. Presupunem că admite două soluţii $u_1(\mathbf{x})$ şi $u_2(\mathbf{x})$. Diferenţa lor $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})$ este funcţie armonică pe D şi $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S. Din (7.12), în care punem $u = v$, rezultă $\displaystyle\int_D \|(\boldsymbol{\nabla} u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x = 0$. Funcţia $u(\mathbf{x})$ este de clasă $C^2(D)$, deci $F(\mathbf{x}) = \|(\boldsymbol{\nabla} u)(\mathbf{x})\|^2$ este continuă şi pozitivă pe D. Să presupunem că există $\mathbf{x}_0 \in D$ pentru care $F(\mathbf{x}_0) > 0$. Datorită continuităţii, există o vecinătate $V_0 \subset D$ a punctului $\mathbf{x}_0$ pe care F ia valori strict pozitive, deci $\displaystyle\int_{V_0} F(\mathbf{x}) d\tau_x > 0$. Rezultă că $\displaystyle\int_D \|(\boldsymbol{\nabla} u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x = \int_{V_0} F(\mathbf{x}) d\tau_x > 0$, care contrazice egalitatea de mai sus. Prin urmare, $F(\mathbf{x}) = 0$, $\forall\, \mathbf{x} \in D$. Deci, în toate punctele domeniului D,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = 0.$$

Această egalitate are loc dacă $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = ... = \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0$ în orice punct $\mathbf{x}$ al domeniului D, deci $u(\mathbf{x})$ se reduce la o constantă pe D, adică cele două soluţii $u_1(\mathbf{x})$ şi $u_2(\mathbf{x})$ diferă printr–o constantă.

În cazul când domeniul D este nemărginit, presupunând că $u(\mathbf{x})$ verifică inegalităţile din enunţul Teoremei 7.6.1, considerăm o sferă Σ cu centrul în originea reperului şi de rază $a > R_0$. Fie B_a bila care are frontiera S. Notăm $D_a = D \cap B_a$. Frontiera domeniului D_a este formată din o parte a frontierei S pe care o notăm cu S' şi o parte a sferei Σ pe care o notăm cu Σ'. Evident, este posibil ca $\Sigma = \Sigma'$ sau $S = S'$.

Să presupunem că există două soluţii $u_1(\mathbf{x})$ şi $u_2(\mathbf{x})$ ale problemei Neumann pentru domeniul D nemărginit, verificând condiţiile suplimentare. Diferenţa lor $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x})$ este funcţie armonică pe D cu $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S. În plus, pentru $\|\mathbf{x}\| > R_0$ avem

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{\|\mathbf{x}\|^{\lambda}}, \quad \max\left\{\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right|, \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(\mathbf{x})\right|, ..., \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right|\right\} \leq \frac{K}{\|\mathbf{x}\|^{1+\lambda}}. \tag{7.40}$$

Prin urmare, $u(\mathbf{x})$ este funcţie armonică pe D_a, $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S' iar pe Σ' sunt satisfăcute condiţiile (7.40), cu $\|\mathbf{x}\| = a$.

Să scriem formula (7.12) pentru $u = v$ şi domeniul D_a,

$$\int_{S'} u(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma_y + \int_{\Sigma'} u(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) d\sigma_y = \int_{D_a} \|(\boldsymbol{\nabla} u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x. \tag{7.41}$$

Deoarece $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0$, pe S', prima integrală din (7.41) este nulă. Evaluăm a doua integrală ţinând seama de condiţiile (7.40). Avem

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big| = |(\boldsymbol{\nabla} u)\cdot \mathbf{n}| \le \|(\boldsymbol{\nabla} u)(\mathbf{x})\| \le \Big|\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big| + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_2}\Big| + ... + \Big|\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|,$$

deci

$$\Big|\int_{\Sigma'} u(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y})d\sigma_y\Big| \le \int_{\Sigma'} |u(\mathbf{y})|\Big|\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y})\Big|d\sigma_y \le \frac{2C}{a^\lambda}\cdot\frac{6K}{a^{1+\lambda}}\int_{\Sigma'} d\sigma_y.$$

Ultima integrală, fiind aria unei porţiuni din sfera Σ, este mai mică decât $\omega_n a^{n-1}$, deci

$$\Big|\int_{\Sigma'} u(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y})d\sigma_y\Big| \le \frac{12CK}{a^{2\lambda+2-n}}.$$

Prin ipoteză, $\lambda > \dfrac{n-2}{2}$ şi pentru a suficient de mare, membrul doi al acestei inegalităţi este mai mic decât orice $\varepsilon > 0$ dat. Revenind la egalitatea (7.41) rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încât pentru orice $a > \eta(\varepsilon)$,

$$\int_{D_a} \|(\boldsymbol{\nabla} u)(\mathbf{x})\|^2 d\tau_x < \varepsilon,$$

fapt care este posibil, numai dacă $\Big|\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big| = \Big|\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\Big| = ... = \Big|\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\Big| = 0$ pe D_a pentru orice $a > \eta(\varepsilon)$. Deci $u(\mathbf{x})$ se reduce la o constantă pe D. Ţinând seama că $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|} u(\mathbf{x}) = 0$, rezultă $u(\mathbf{x}) = 0$ pe D, deci $u_1(\mathbf{x}) = u_2(\mathbf{x})$ şi unicitatea soluţiei este dovedită. **q.e.d.**

7.7 Funcţia lui Greeen a problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace

Definiţia 7.7.1. *Prin* ***funcţie Greeen a problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace*** *într–un domeniu $D \subset \mathbb{R}^n$ se înţelege funcţia $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ depinzând de punctele $\mathbf{x} \in D \cup S$ şi $\mathbf{y} \in D \cup S$ care are următoarele proprietăţi:*

(**1**) *această funcţie are forma*

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = E(\mathbf{x},\mathbf{y}) + g(\mathbf{x},\mathbf{y}), \tag{7.42}$$

unde $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace în n dimensiuni, iar $g(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este o funcţie armonică atât în raport cu variabila $\mathbf{x} \in D$, cât şi în raport cu variabila $\mathbf{y} \in D$;

(**2**) *când punctul $\mathbf{x}$ sau $\mathbf{y}$ se află pe frontiera S a domeniului D, este satisfăcută egalitatea*

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0. \tag{7.43}$$

Este uşor de văzut că $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge 0$ peste tot în domeniul D. Într-adevăr, să notăm prin D_δ acea parte a domeniului D care se situează în afara bilei închise $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le \delta$, unde $\mathbf{y} \in \mathbf{D}$, de rază suficient de mică, $\delta > 0$. Deoarece $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = +\infty$, pentru δ suficient de mic, trebuie să avem inegalitatea $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0$, când $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| < \delta$. În consecinţă, $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge 0$ pe frontiera domeniului D_δ şi prin urmare, conform principiului de extrem (Teorema 7.5.1), $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge 0$ pentru toţi $\mathbf{x} \in D_\delta$ ceea ce face să concluzionăm că $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ge 0$ pretutindeni în $D \cup S$.

Teorema 7.7.1. *Funcţia lui Green $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este simetrică în raport cu variabilele sale:*

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x}), \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in D.$$

Demonstraţie. Pentru a demonstra această proprietate, să includem punctele $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{y}$ în bilele închise $d: \ \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\| \leq \delta$ şi $d': \ \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| \leq \delta$ de rază $\delta > 0,$ suficient de mică. Partea din afara celor două bile va fi notată cu $D_\delta.$

Funcţiile $v(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z},\mathbf{y})$ şi $u(\mathbf{z}) = G(\mathbf{z},\mathbf{x})$ sunt armonice în interiorul domeniului D situat în exteriorul bilelor d şi d'. Aplicând formula (7.13) domeniului D_δ obţinem egalitatea

$$\int_S \Big(G(\mathbf{z},\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z},\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \Big) dS_z = \int_C \Big(G(\mathbf{z},\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z},\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \Big) dS_z + \\ + \int_{C'} \Big(G(\mathbf{z},\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z},\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \Big) dS_z,$$

unde $\mathbf{n}_z$ denotă normala unitară exterioară în puncte $\mathbf{z}$ aparţinând atât lui S cât şi sferelor $C: \ \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\| = \delta$ şi $C': \ \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| = \delta.$

În baza Definiţiei 7.7.1, $G(\mathbf{z},\mathbf{x}) = G(\mathbf{z},\mathbf{y}) = 0, \ z \in S,$ astfel că ultima formulă se rescrie în forma

$$\int_C \Big(G(\mathbf{z},\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z},\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} \Big) dS_z = \int_{C'} \Big(G(\mathbf{z},\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_z} - G(\mathbf{z},\mathbf{y}) \frac{\partial G(\mathbf{z},\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}_z} \Big) dS_z.$$

În final, folosind relaţiile:

$$G(\mathbf{z},\mathbf{x}) = E(\mathbf{z},\mathbf{x}) + g(\mathbf{z},\mathbf{x}); \quad G(\mathbf{z},\mathbf{y}) = E(\mathbf{z},\mathbf{y}) + g(\mathbf{z},\mathbf{y}),$$

unde $g(\mathbf{z},\mathbf{x})$ şi $g(\mathbf{z},\mathbf{y})$ sunt funcţii armonice, prin trecere la limtă pentru $\delta \to 0,$ obţinem egalitatea $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = G(\mathbf{y},\mathbf{x}),$ pe care trebuia să o demonstrăm. **q.e.d.**

Acum, fie că $u(\mathbf{x})$ din formula de reprezentare integrală (7.28) este soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace şi să înlocuim în (7.28) pe $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ cu $G(\mathbf{x},\mathbf{y}).$ Atunci, repetarea argumentelor din obţinerea formulei (7.28) şi aplicarea lui (7.42) şi (7.43) conduce la formula

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y} \varphi(\mathbf{y}) dS_\xi, \tag{7.44}$$

unde φ este o funcţie reală continuă dată.

Când funcţia lui Green este cunoscută, formula (7.44) exprimă soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace în următorul mod: *să se determine funcţia $u(\mathbf{x})$, armonică în D, continuă pe $D \cup S$ şi care satisface condiţia la limită*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0); \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \tag{7.45}$$

Faptul că funcţia $u(\mathbf{x})$ dată în formula (7.44) este armonică rezultă din faptul că funcţia $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este armonică în raport cu $\mathbf{x}$ pentru $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$ Totuşi, faptul că această funcţie satisface condiţia la limită (7.45) cere o demonstraţie specială.

7.8 Potenţialul de masă

Să considerăm expresia

$$u(\mathbf{x}) = \int_D E(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mu(\mathbf{y}) d\tau_y, \tag{7.46}$$

unde D este un domeniu din $I\!E^n$, $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este soluţia fundamentală introdusă în (7.5), iar $\mu(\mathbf{y})$ este o funcţie definită pe domeniul D.

Funcţia (7.46) este o integrală depinzând de n parametri, coordonatele punctului $\mathbf{x}\in I\!E^n$.

Definiţia 7.8.1. *Când integrala din membrul drept al formulei (7.46) este convergentă, funcţia $u(\mathbf{x})$ se numeşte **potenţial al unei distribuţii $n-$dimensionale de masă** sau **potenţial de masă** cu **densitatea de masă** sau **densitatea de volum** μ în domeniul D.*

În cazul când $n=3$ pentru potenţialul de masă se foloseşte denumirea de *potenţial newtonian* sau *potenţial de volum*.

Dacă $n=2$ potenţialul de masă corespunzător poartă denumirea de *potenţial logaritmic*.

Având în vedere expresia soluţiei fundamentale în cazul $n=2$, rezultă că potenţialul logaritmic are expresia

$$u(x_1,x_2)=\int_D \mu(\xi_1,\xi_2)\ln\frac{1}{r}\,d\xi_1 d\xi_2, \tag{7.47}$$

unde $r=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}$ este distanţa euclidiană între punctele de coordonate (x_1,x_2) şi (ξ_1,ξ_2).

În cele ce urmează vom presupune că D este un domeniu mărginit.

Deoarece soluţia fundamentală $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este o funcţie armonică pentru $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$, potenţialul de volum $u(\mathbf{x})$ din (7.46) este funcţie armonică pentru puncte $\mathbf{x}$ situate în afara mulţimii $D\cup S$, unde S este frontiera domeniului D. În plus, în cazul $n>2$ funcţia $u(\mathbf{x})$ tinde la zero pentru $\|\mathbf{x}\|\to\infty$.

Folosind teoria integralelor depinzând de parametri [8], se pot demonstra cu uşurinţă următoarele teoreme.

Teorema 7.8.1. *Dacă funcţia μ este continuă şi mărginită în domeniul D, potenţialul de volum $u(\mathbf{x})$ este o funcţie continuă care are derivate parţiale de ordinul întâi, continue în $I\!E^n$, exprimate de formulele*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\int_D \frac{\partial}{\partial x_i}E(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\tau_y \quad (i=1,2,...,n). \tag{7.48}$$

Teorema 7.8.2. *Dacă densitatea de masă μ posedă derivate parţiale de ordinul întâi, continue şi mărginite în D, atunci potenţialul de volum (7.46) admite derivate parţiale de ordinul al doilea în D.*

În baza acestor teoreme, pentru $\mathbf{x}\in D$ se obţine relaţia

$$(\nabla^2 u)(\mathbf{x})=-\omega_n\,\mu(\mathbf{x}), \tag{7.49}$$

care, în cazul $n=2$, devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1,x_2)+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,x_2)=-2\pi\,\mu(x_1,x_2). \tag{7.50}$$

În baza formulelor (7.49) şi (7.50) deducem că funcţia definită de relaţia

$$u(\mathbf{x})=-\frac{1}{\omega_n}\int_D G(\mathbf{x},\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\tau_y, \tag{7.51}$$

unde $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ este funcţia lui Green a problemei Dirichlet pentru funcţii armonice în domeniul D, iar $f(\mathbf{x})$ este o funcţie mărginită care are derivate parţiale de ordinul întâi continue şi mărginite în D, este o soluţie regulată a ecuaţiei Poisson

$$\nabla^2 u(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in D. \tag{7.52}$$

De asemenea, se poate arăta că funcţia (7.51) satisface *condiţia la limită omogenă*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} u(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in D,\quad \mathbf{x}_0\in S. \tag{7.53}$$

Astfel, dacă funcţia lui Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este cunoscută, potenţialul de volum $u(\mathbf{x})$ determinat prin formula (7.51) dă soluţia, în domeniul D, pentru problema Dirichlet omogenă (7.53) a ecuaţiei Poisson (7.52).

Acum, în locul condiţiei la limită omogenă de tipul (7.53), să considerăm o *condiţie la limită neomogenă* de forma

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \tag{7.54}$$

Dacă $v(\mathbf{x})$ este o funcţie armonică în D care satisface condiţia la limită (7.54), adică

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} v(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S$$

şi dacă $u(\mathbf{x})$ este soluţia căutată a problemei Dirichlet neomogene (7.54) pentru ecuaţia Poisson (7.52), atunci diferenţa $u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$ este o soluţie regulată a ecuaţiei

$$\nabla^2 w(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D$$

care satisface condiţia la limită omogenă

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{x}_0 \in S. \tag{7.55}$$

Prin urmare, *problema determinării soluţiei* $u(\mathbf{x})$ *a problemei Dirichlet neomogene* (7.54) *pentru ecuaţia Poisson* (7.52) *se reduce la determinarea soluţiei* $w(\mathbf{x})$ *ale aceleiaşi ecuaţii care însă satisface condiţia la limită omogenă* (7.55).

7.9 Potenţialii de simplu strat şi dublu strat

Pe lângă potenţialul de masă, prezentat în paragraful precedent, formulele de reprezentare integrală (7.18), (7.26) şi (7.28) introduc în studiu alte două integrale care depind de parametri, calculate pe hipersuprafeţe $(n-1)-$dimensionale din $\mathbb{E}^n$, de forma:

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D} E(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mu(\mathbf{y})d\sigma_y; \tag{7.56}$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial D} \mu(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_y}d\sigma_y, \tag{7.57}$$

denumite respectiv *potenţial de simplu strat* şi *potenţial de dublu strat*.

În cazul $n = 2$, potenţialul de simplu strat are expresia

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_C \mu(\mathbf{y}) \ln\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}ds_y, \tag{7.58}$$

unde C este o *curbă Jordan*, *simplă* şi *închisă*, care are *curbură continuă*, ds_y este *elementul de arc* al curbei, iar μ este o *funcţie de două ori continuu diferenţiabilă*, numită *densitate de potenţial*. Curba C este frontiera unui domeniu mărginit $D \subset \mathbb{E}^n$.

Observând că (7.58) se poate scrie în forma alternativă

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{\ln\|\mathbf{x}\|}{2\pi}\int_C \mu(\mathbf{y})ds_y + \frac{1}{2\pi}\int_C \ln\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\mu(\mathbf{y})ds_y, \tag{7.59}$$

deducem că $\lim\limits_{\|\mathbf{x}\|\to\infty} u(\mathbf{x}) = 0$ numai atunci când este îndeplinită condiţia

$$\int_C \mu(\mathbf{y})ds_y = 0.$$

Potenţialul de dublu strat în plan are forma

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \mu(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\ln\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|ds_y. \tag{7.60}$$

Desigur, potenţialul de masă în cazul a două dimensiuni este

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_D \mu(\mathbf{y})\ln\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}dy_1dy_2, \tag{7.61}$$

unde dy_1dy_2 este *elementul de arie în plan.*

Denumirile date acestor integrale depinzând de parametri justifică o altă interpretare a formulelor integrale ale unei funcţii de clasă C^1 şi $C^2,$ sau a unei funcţii armonice, şi anume *formule de reprezentare prin potenţiali* .

Dacă $n = 3,$ ţinând cont de forma soluţiei fundamentale şi de faptul că în acest caz aria sferei unitate este $4\pi,$ rezultă că potenţialii de simplu strat, de strat dublu şi de masă au respectiv expresiile

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\mu(\mathbf{y})}{r}d\sigma_y, \tag{7.62}$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_S \mu(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\Big(\frac{1}{r}\Big)d\sigma_y, \tag{7.63}$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{\mu(\mathbf{y})}{r}dy_1dy_2dy_3, \tag{7.64}$$

unde S este o suprafaţă simplă, închisă, care mărgineşte domeniul $D \subset,$ $d\sigma_y$ este elementul de arie în punctul $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ al suprafeţei $S,$ $dy_1dy_2dy_3$ este elementul de volum în spaţiul tridimensional, iar r este distanţa euclidiană dintre punctele $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ şi $\mathbf{y}$, adică $r = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$

Integralele care definesc potenţialul de volum şi potenţialii de simplu şi dublu strat care apar în formulele de reprezentare sunt improprii, deoarece integranzii respectivi sunt funcţii discontinue. Pentru convergenţa lor însă se poate aplica Lema 7.3.1, ţinând evident cont că dimensiunea varietăţii ∂D este $n-1.$ Atât în această lemă cât şi în toate formulele care conţin integrale improprii de acest tip, integralele se înţeleg *în sensul valorii principale Cauchy* , adică vom scrie

$$\int_D \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^\beta\cdot f(y)d\tau_y = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^\beta\cdot f(y)d\tau_y,$$

unde $B(\mathbf{x},\varepsilon)$ este bila de rază $\varepsilon > 0$ cu centrul în punctul $\mathbf{x}$. Folosind proprietăţile soluţiei fundamentale $E(\mathbf{x},\mathbf{y}),$ deducem că fiecare din potenţialii (7.56) şi (7.57) este funcţie armonică în întreg spaţiul afin $\mathbb{E}^n,$ cu excepţia punctelor aparţinând suprafeţei $S,$ şi tinde la zero pentru $\|\mathbf{x}\| \to \infty.$

Domeniul D şi complementara acestuia în raport cu întreg spaţiu $\mathbb{E}^n$ vor fi notate prin D^+ şi respectiv $D^-.$

Se poate demonstra că potenţialul de dublu strat suferă un salt la traversarea frontierei S a domeniului $D,$ atât dinspre D^+ cât şi dinspre $D^-.$ De exemplu, în cazul planului, relaţiile de salt sunt [4][p. 79]:

$$u^+(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0); \tag{7.65}$$

$$u^-(\mathbf{x}^0) - u(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0), \tag{7.66}$$

unde $u^+(\mathbf{x}^0)$ şi $u^-(\mathbf{x}^0)$ sunt limitele dinspre $D^+,$ respectiv $D^-,$ a potenţialului de dublu strat (7.60), atunci când $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 \in C.$

Cu aceste pregătiri, suntem în măsură să construim soluţia $u(\mathbf{x})$ a problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace în domeniul $D^+ \subset \mathbb{E}^n$ cu condiţia la limită (pe frontieră)

$$u^+(\mathbf{x}^0) = g(\mathbf{x}^0), \tag{7.67}$$

sub presupunerea că *curbura curbei* C şi funcţia dată $g(\mathbf{x}^0)$ sunt continue. Această soluţie se caută în forma potenţialului de dublu strat (7.60), cu precizarea că, pentru moment, densitatea de potenţial $\mu(\mathbf{y})$ este funcţie necunoscută.

Se demonstrează mai întâi că formula (7.60) care exprimă potenţialul de dublu strat în plan, are sens şi pentru $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$. Pentru aceasta, se introduce funcţia $K(s,t)$, de variabilele s şi t, *abscisele curbilinii* (lungimile de arc) ale punctelor $\mathbf{x}^0$ şi $\mathbf{y}$ de pe curba C, prin relaţia

$$\pi K(s,t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} \ln \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|$$

şi se arată că

$$\pi K(s,t) = \frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|^2} \sum_{i=1}^{2} (y_i - x_i^0) \frac{\partial y_i}{\partial \mathbf{n}_y} = \frac{\cos\varphi}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|} = \frac{\partial}{\partial t}\theta(s,t), \tag{7.68}$$

unde

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n}_y}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|}$$

şi

$$\theta(s,t) = \arctan \frac{y_2 - x_2^0}{y_1 - x_1^0}.$$

Se poate vedea uşor [4][p. 76] că $K(s,t)$ este o funcţie continuă de s şi t şi că

$$\lim_{t\to 0} K(s,t) = \frac{K(s)}{2\pi},$$

unde $K(s)$ este *curbura curbei* C în punctul $\mathbf{x}_0$ al ei.

Din continuitatea funcţiei $K(s)$ rezultă că expresia

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|} \mu(\mathbf{y}) ds_y. \tag{7.69}$$

a potenţialului de dublu strat (7.60) are sens pentru $\mathbf{x}_0 \in C$ şi că $u(\mathbf{x})$ este funcţie continuă pe C, în fiecare punct $\mathbf{x}_0 \in C$.

În conformitate cu (7.68), (7.69) şi (7.67), pentru ca funcţia $u(\mathbf{x})$ exprimată prin formula (7.60) (această funcţie este armonică în domeniul D^+) să satisfacă condiţia la limită (7.67), trebuie să aibă loc egalitatea

$$\mu(s) + \int_C K(s,t)\mu(t)dt = -2g(s). \tag{7.70}$$

Egalitatea (7.70) este o *ecuaţie integrală Fredholm liniară, de tipul al doilea* , în raport cu funcţia necunoscută μ.

Prin urmare, *problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace se reduce la ecuaţia integrală* (7.70).

În [4][p. 228] se demonstrează că *ecuaţia integrală* (7.70) *are o singură soluţie* μ. Aceasta înseamnă că *potenţialul de dublu strat* (7.60) *cu densitatea* μ *satisfăcând ecuaţia integrală* (7.70) *este soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace cu condiţia pe frontieră* (7.67).

Astfel, *este lămurită* **existenţa soluţiei acestei probleme**.

Se poate demonstra [4][p. 82] că atunci *când punctul* $\mathbf{x}$ *trece din domeniul* D^+ *spre domeniul* D^-*, iar trecerea se face printr–un punct* $\mathbf{x}^0 \in C$, potenţialul de simplu strat (7.58) rămâne continuu în timp ce derivata sa normală $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x}$ suferă salturile

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x}\Big)^+ - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}} = \frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0) \tag{7.71}$$

şi

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_x}\Big)^- - \frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}} = -\frac{1}{2}\mu(\mathbf{x}^0). \tag{7.72}$$

În formulele (7.71) şi (7.72) derivatele direcţionale $\dfrac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}}$ se exprimă prin formula

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{n}_{x^0}} = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}_0)\cdot \mathbf{n}_y}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0\|^2} \mu(\mathbf{y}) ds_y = \frac{1}{2} \int_C K^*(s,t)\mu(t)dt, \tag{7.73}$$

unde

$$K^*(s,t) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\arctan\frac{y_2 - x_2^0}{y_1 - x_1^0} \tag{7.74}$$

este funcţie continuă. *Problema Neumann* (numită de asemeni *a doua problemă cu valori la limită sau a doua problemă fundamentală*) a teoriei funcţiilor armonice se formulează în felul următor: *să se găsească funcţia $u(\mathbf{x})$, armonică în D^+ care să fie continuă înpreună cu derivatele parţiale de ordinul întâi în $D^+ \cup C$ şi satisface condiţia pe frontieră*

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big)^+ = g(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{x}^0 \in C, \tag{7.75}$$

unde $g(\mathbf{x}^0)$ este o funcţie dată definită în punctele curbei C.

Am arătat anterior că dacă $u(\mathbf{x})$ şi $u_1(\mathbf{x})$ sunt două soluţii ale problemei Neumann, atunci ele diferă printr–o constantă, adică $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + C$.

Prin urmare, dacă $u(\mathbf{x})$ este o soluţie a problemei Neumann, atunci aceeaşi proprietate o are şi funcţia $u(\mathbf{x}) + C$, unde C este o constantă reală oarecare.

Din Teorema 7.2.6, *pentru ca problema Neumann cu condiţia la limită* (7.75) *să aibă soluţie este necesar ca*

$$\int_C g(s)ds = 0. \tag{7.76}$$

Acum, avem toate condiţiile că să rezolvăm problema Neumann cu ajutorul potenţialului de simplu strat (7.58) cu densitate necunoscută μ. Folosind (7.71), (7.73) şi (7.75), pentru determinarea funcţiei μ obţinem ecuaţia integrală Fredholm de tipul al doilea

$$\mu(s) + \int_C K^*(s,t)\mu(t)dt = 2g(s) \tag{7.77}$$

a cărui *nucleu* $K^*(s,t)$ se exprimă prin formula (7.74).

Astfel, problema Neumann se reduce la *ecuaţia integrală cu nucleu singular* (7.77).

Se poate arăta [4][p. 228] că *condiţia* (7.76) *este nu numai necesară dar şi suficientă pentru ca soluţia problemei Neumann să existe.*

7.10 Problema Dirichlet interioară pentru cerc

Ne propunem să determinăm funcţia armonică $u = u(x,y)$ în discul D cu centrul în origine şi rază 1, când se dă funcţia u pe frontiera C a acestuia.

Modelul matematic pentru această problemă la limită, denumită *problema lui Dirichlet interioară pentru cerc* îl constituie următoarele ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in D, \\ u(x,y) = h(x,y), & (x,y) \in C = \partial D, \end{cases} \tag{7.78}$$

unde D este domeniul definit de inegalitatea $x^2 + y^2 < 1$ (discul de rază 1), iar C este cercul de ecuaţie $x^2 + y^2 = 1$, deci cu centrul în originea reperului Oxy şi rază 1.

Vom reformula această problemă la limită în coordonate polare, ceea ce revine la a efectua schimbarea de variabile independente

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{7.79}$$

Laplacianul funcţiei u, în două dimensiuni, în coordonate polare, are expresia

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \tag{7.80}$$

astfel că, utilizând (7.79) şi (7.80), problema la limită (7.78) devine

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0, \quad (r,\theta)\in[0,1)\times[0,2\pi], \\ u_{|C}=f(\theta), \quad \theta\in C=[0,2\pi], \end{cases} \tag{7.81}$$

unde s–a efectuat notaţia $f(\theta)=h(\cos\theta,\sin\theta)$.

În problema la limită reformulată în coordonate polare (7.81), noua funcţie necunoscută a fost notată tot cu u şi este de fapt rezultatul compunerii funcţiei u din (7.78) cu funcţiile reale de variabilele reale r şi θ, definite prin relaţiile (7.79). Prin urmare, în (7.81) avem că $u=u(r,\theta)$ este funcţia necunoscută.

Pentru determinarea soluţiei problemei la limită (7.81), utilizăm *metoda separării variabilelor* şi deci căutăm soluţia ecuaţiei $(7.81)_1$ în forma

$$u(r,\theta)=R(r)\cdot\Phi(\theta). \tag{7.82}$$

Impunând ca funcţia u din (7.82) să satisfacă ecuaţia diferenţială $(7.81)_1$, după separarea variabilelor, obţinem ecuaţia

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}+\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=0,$$

care este echivalentă cu

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=k, \tag{7.83}$$

unde k este o constantă ale cărei valori urmează să fie precizate. Obţinem astfel ecuaţiile:

$$\begin{cases} \Phi''(\theta)+k\Phi(\theta)=0; \\ r^2R''(r)+rR'(r)-kR(r)=0. \end{cases} \tag{7.84}$$

Din condiţia naturală ca funcţia u din (7.78) să fie continuă pe $D\cup C$ şi să admită derivate parţiale de ordinul doi continue pe D, rezultă că $R(r)$ trebuie să fie *funcţie mărginită* pe compactul $[0,1]$. În afară de aceasta, fiindcă domeniul D este un disc, Φ trebuie să fie *funcţie periodică* de perioadă 2π, adică $\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$. Această condiţie de periodicitate a funcţiei Φ implică o anumită formă a constantei k şi nu este greu de dovedit că aceste valori sunt $k=n^2$, unde $n\in I\!N$. Prin urmare, ecuaţia $(7.84)_1$ are soluţiile

$$\Phi_n(\theta)=\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta, \quad n\in I\!N. \tag{7.85}$$

Funcţiile (7.85) se numesc *funcţii proprii* ale problemei la limită considerată, iar valorile lui k, adică $k=n^2$, unde $n\in I\!N$, se numesc *valori proprii* ale problemei.

Ecuaţia diferenţială $(7.84)_2$ este de tip Euler şi căutând soluţii ale acesteia de forma

$$R(r)=r^\alpha,$$

constatăm că constanta reală α trebuie să fie soluţia *ecuaţiei caracteristice*

$$\alpha^2-n^2=0,$$

care are desigur rădăcinile $\alpha=\pm n$. Astfel, pentru $n\neq 0$ ecuaţia diferenţială $(7.84)_2$ are soluţia generală

$$R_n(r)=\gamma_n\,r^n+\delta_n\,r^{-n}.$$

Pentru $n=0$, ecuaţia corespunzătoare obţinută din $(7.84)_2$ este $rR''(r)+R'(r)=0$, care se mai poate scrie $(rR'(r))'=0$, sau $rR'(r)=\delta_0$. Ultima ecuaţie are soluţia $R(r)=\delta_0\ln r+\gamma_0$. Însă, din condiţia de mărginire a funcţiei $R(r)$, deducem că $\delta_n=0$, pentru $n\in I\!N$. Prin urmare, ecuaţia $(7.81)_1$ are soluţiile

$$u_n(r,\theta)=r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta), \quad n\in I\!N^*,$$

unde am notat $\alpha_n\gamma_n=A_n$ şi $\beta_n\gamma_n=B_n$.

Să considerăm acum seria de funcţii

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta). \tag{7.86}$$

Funcţia u din (7.86) verifică ecuaţia $(7.81)_1$ deoarece fiecare termen verifică acea ecuaţie. Determinăm acum constantele A_0, A_n, B_n astfel încât să fie îndeplinită condiţia la limită $(7.81)_2$. Trebuie să avem

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)=f(\theta),\quad \theta\in[0,2\pi].$$

În ipoteza că funcţia $f(\theta)$ se poate dezvolta în serie Fourier, pentru constante se obţine valorile:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)d\tau;\quad A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\cos n\tau d\tau;\quad B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\sin n\tau d\tau.$$

Introducem aceste valori ale constantelor în (7.86) şi obţinem relaţia

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n(\cos n\theta\cos n\tau+\sin n\theta\sin n\tau)\Big)d\tau,$$

care se mai poate scrie în forma

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\tau)\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\tau)\Big)d\tau. \tag{7.87}$$

Suma seriei de sub integrala din relaţia (7.87) poate fi calculată pornind de la identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\tau)+i\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n(\theta-\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n\exp\left(in(\theta-\tau)\right).$$

Ultima serie este convergentă pentru $r<1$ şi are suma

$$S=\frac{r\exp\left(i(\theta-\tau)\right)}{1-r\exp\left(i(\theta-\tau)\right)}=\frac{r}{\exp\left(-i(\theta-\tau)\right)-r}=\frac{r\Big(\cos(\theta-\tau)-r+i\sin(\theta-\tau)\Big)}{1-2r\cos\left(\theta-\tau\right)+r^2}$$

şi prin urmare

$$\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\tau)=\frac{r\cos(\theta-\tau)-r^2}{1-2r\cos\left(\theta-\tau\right)+r^2}. \tag{7.88}$$

Pentru a da o formă finală relaţiei (7.87), mai trebuie calculată expresia

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\tau)$$

şi pentru aceasta utilizăm rezultatul (7.88). Găsim

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos n(\theta-\tau)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\left(\theta-\tau\right)+r^2}. \tag{7.89}$$

Introducând (7.89) în (7.87), obţinem soluţia problemei (7.81) în forma

$$u(r,\theta)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\tau)d\tau}{1-2r\cos\left(\theta-\tau\right)+r^2}. \tag{7.90}$$

Prin schimbarea lui r în r/R se obţine soluţia problemei Dirichlet pentru cercul de rază R

$$u(r,\theta) = \frac{R - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\tau)d\tau}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \tau) + r^2}. \tag{7.91}$$

Fiecare din relaţiile (7.90) şi (7.91) este cunoscută sub numele de *formula lui Poisson*.

Exerciţiul 7.10.1. *Să se determine soluţia problemei Dirichlet pentru discul cu centrul în origine de rază* 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x,y) = y, \ \ \textit{pentru} \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \textit{cu proprietatea} \ \ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{7.92}$$

Soluţie. Se trece la coordonate polare în plan şi se utilizează formula lui Poisson (7.90) în care $f(\tau) = \sin\tau$, deci

$$u(r,\theta) = \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\tau}{1 - 2r\cos(\theta - \tau) + r^2} d\tau. \tag{7.93}$$

În integrala (7.93) efectuăm schimbarea de variabilă $e^{i\tau} = \exp(i\tau) = z$. Observăm întâi că dacă τ parcurge intervalul de integrare $[0, 2\pi]$, atunci z aparţine cercului $|z| = 1$ având centrul în origine şi raza 1. Ţinând cont apoi de *formulele lui Euler*

$$\sin\tau = \frac{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i}, \quad \cos\tau = \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2}$$

şi de substituţia $e^{i\tau} = z$, găsim

$$\sin\theta = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos(\theta - \tau) = \frac{z^2 e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2z}.$$

Diferenţiind în relaţia $e^{i\tau} = z$, obţinem $ie^{i\tau}d\tau = dz$, de unde deducem $d\tau = \dfrac{dz}{iz}$. Folosind toate aceste rezultate în integrala (7.93) găsim că aceasta devine

$$u(r,\theta) = \frac{1 - r^2}{4\pi} \int_{|z|=1} \frac{z^2 - 1}{z\Big(re^{-i\theta}z^2 - (1 + r^2)z + re^{i\theta}\Big)} dz.$$

Numitorul funcţiei $f(z)$ de sub semnul integralei are rădăcinile $z_1 = 0$, $z_2 = re^{i\theta}$ şi $z_3 = \dfrac{1}{r}e^{i\theta}$, însă doar z_1 şi z_2 se află în interiorul cercului $|z| = 1$. Punctele z_1 şi z_2 sunt *poli simpli* pentru funcţia $f(z)$.

Pentru calculul acestei integrale în complex se aplică *teorema reziduurilor* [2], [15][p. 251], deci

$$u(r,\theta) = \frac{i(1 - r^2)}{2}\Big(\text{Rez}[f(z), z_1] + \text{Rez}[f(z), z_2]\Big),$$

unde $\text{Rez}[f(z), z_1]$ şi $\text{Rez}[f(z), z_2]$ sunt *reziduurile* funcţiei $f(z)$ în polii z_1 şi respectiv z_2, iar

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z\Big(re^{-i\theta}z^2 - (1 + r^2)z + re^{i\theta}\Big)}.$$

Deoarece $f(z)$ este câtul polinoamelor

$$P(z) = z^2 - 1, \quad Q(z) = z\Big(re^{-i\theta}z^2 - (1 + r^2)z + re^{i\theta}\Big),$$

rezultă că reziduurile funcţiei $f(z)$ în polii simpli z_1 şi z_2 sunt

$$\text{Rez}[f(z), z_1] = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)}, \quad \text{Rez}[f(z), z_2] = \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)}.$$

Prin urmare, reziduurile corespunzătoare sunt

$$\text{Rez}[f(z), z_1] = -\frac{1}{re^{i\theta}}, \quad \text{Rez}[f(z), z_2] = \frac{re^{2i\theta} - 1}{r(r^2-1)e^{i\theta}},$$

suma lor fiind

$$\text{Rez}[f(z), z_1] + \text{Rez}[f(z), z_2] = \frac{r(e^{2i\theta}-1)}{(r^2-1)e^{i\theta}}.$$

Aplicând teorema reziduurilor [15][p. 251], găsim

$$u(r,\theta) = -i\frac{r(e^{2i\theta}-1)}{2e^{i\theta}} = r\sin\theta.$$

Revenind la variabilele x şi y constatăm că soluţia problemei la limită (7.92) este $u(x,y) = y$. ■

Exerciţiul 7.10.2. *Să se determine soluţia $u = u(r,\theta)$ a problemei Dirichlet interioară pentru discul cu centrul în origine de rază 3, ştiind că pe frontiera acestuia funcţia u satisface condiţia $u(3,\theta) = \dfrac{\theta}{2}$, unde $\theta \in [0, 2\pi]$. Să se calculeze valoarea în punctul $M(1, \pi/3)$ a soluţiei.*

Soluţie. Conform rezultatelor stabilite mai sus, soluţia problemei

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad (r,\theta) \in [0,3) \times [0, 2\pi], \\ u(3,\theta) = \dfrac{\theta}{2}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \tag{7.94}$$

este de forma

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta), \tag{7.95}$$

unde coeficienţii se determină din condiţia la limită $(7.94)_2$:

$$u(3,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) = \frac{\theta}{2}. \tag{7.96}$$

Ultima egalitate din (7.96) reprezintă dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei $\dfrac{\theta}{2}$, de perioadă $T = 2\pi$. Prin urmare, coeficienţii acestei dezvoltări trebuie să fie daţi de relaţiile

$$\begin{cases} E_0 &=& \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\theta}{2}\, d\theta = \dfrac{\pi}{2}, \\ E_n &=& \dfrac{1}{3^n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\theta}{2} \cos n\theta\, d\theta = 0, \\ F_n &=& \dfrac{1}{3^n\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\theta}{2} \sin n\theta\, d\theta = -\dfrac{1}{n3^n}. \end{cases} \tag{7.97}$$

Din (7.95) şi (7.97) rezultă că soluţia căutată este

$$u(r,\theta) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n3^n} \sin n\theta.$$

Valoarea soluţiei $u(r,\theta)$ în punctul M de coordonate polare $r=1$ şi $\theta=\pi/3$ se determină simplu şi găsim

$$u\Big(1,\frac{\pi}{3}\Big)=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}\sin\frac{n\pi}{3}.$$

■

Exerciţiul 7.10.3. *Să se determine soluţia $u=u(r,\theta)$ a problemei lui Dirichlet pentru discul cu centrul în origine şi de rază 2, ştiind că pe frontiera acestuia funcţia $u(r,\theta)$ satisface condiţia $u(2,\theta)=3\sin 2\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$, unde $\theta\in[0,2\pi]$.*

Soluţie. Întrucât se cere determinarea soluţiei care să depindă de coordonatele polare r şi θ, vom considera de la bun început că ecuaţia lui Laplace este scrisă în aceste coordonate. Prin urmare, în discul de rază $r=2$, trebuie să determinăm acea soluţie a ecuaţiei

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

care să satisfacă condiţia la limită $u(2,\theta)=3\sin 2\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$, unde $\theta\in[0,2\pi]$.

Se aplică metoda separării variabilelor, ceea ce înseamnă că se caută soluţii de forma

$$u(r,\theta)=R(r)T(\theta)$$

care introduse în ecuaţia de mai sus, conduce la

$$R''T+\frac{1}{r}R'T+\frac{1}{r^2}RT''=0.$$

Separând variabilele în ultima ecuaţie, avem

$$\frac{T''}{T}=-\frac{r^2R''+rR'}{R}=\lambda.$$

Astfel, se obţin ecuaţiile diferenţiale ordinare de ordinul al doilea

$$\begin{cases} T''+\lambda T=0,\\ r^2R''+rR'-\lambda R=0.\end{cases}$$

$^{-1}$Din faptul că funcţia u este periodică în variabila θ, rezultă că şi funcţia $T(\theta)$ trebuie să fie periodică în θ, ceea ce înseamnă că ecuaţia diferenţială în $T(\theta)$ trebuie să aibă soluţii periodice. Rezultă:

$$\lambda=n^2;\quad T''+n^2T=0;\quad r^2R''+rR'-n^2R=0;\quad n=0,1,2,...$$

Soluţiile periodice ale ecuaţiei $T''+n^2T=0$ sunt de forma

$$T_n(\theta)=A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta.$$

Pentru ecuaţia diferenţială $r^2R''+rR'-n^2R=0$ se caută soluţii de forma $R(r)=r^t$. O astfel de funcţie este soluţie dacă $t^2-r^2=0$, ceea ce înseamnă că $t=\pm n$ şi deci

$$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n},\quad n=0,1,2,...$$

Din condiţia ca $R(r)$ să fie continuă în originea $r=0$, deducem că $D_n=0$.

Dacă introducem notaţiile $A_nC_n=E_n$ şi $B_nC_n=F_n$, atunci avem că

$$u_n(r,\theta)=r^n(E_n\cos n\theta+F_n\sin n\theta),\quad n=1,2,...$$

$^{-1}$Folosind principiul superpoziţiei [18] , rezultă că soluţia generală în discul de rază $r = 2$ a ecuaţiei lui Laplace în coordonate polare este

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta).$$

Coeficienţii E_n şi F_n se determină din condiţia la limită, ceea ce înseamnă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (E_n \cos n\theta + F_n \sin n\theta) = 3\sin 2\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta, \ \ \forall\, \theta \in [0, 2\pi],$$

de unde deducem că singurii coeficienţi nenuli sunt E_2 şi F_2 şi aceştia au valorile

$$E_2 = \frac{1}{8}, \quad F_2 = \frac{3}{4}.$$

Prin urmare, soluţia problemei este

$$u(r,\theta) = \frac{r^2}{4}\Big(\frac{1}{2}\cos 2\theta + 3\sin 2\theta\Big).$$

■

Capitolul 8

Probleme şi exerciţii propuse

8.1 Probleme propuse

Problema 8.1.1. *Există câmpuri vectoriale care sunt simultan solenoidale şi irotaţionale?*

Problema 8.1.2. *Să se arate că egalitatea* $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}+\dfrac{\partial f_3}{\partial z}=0$ *constituie o condiţie necesară şi suficientă pentru compatibilitatea sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}=f_1,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_2,\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_3,\end{cases}$$

unde $f_1, f_2, f_3 \in C^1(D)$ *sunt funcţii date pe domeniul simplu conex* $D\subset\mathbb{R}^3$.

Problema 8.1.3. *Să se afle care din câmpurile vectoriale admit un potenţial (scalar sau vectorial) şi să se dtermine acest potenţial:*

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{a}) & \boldsymbol{v}=(x+2y)\boldsymbol{i}+(y-2x)\boldsymbol{j}-2z\boldsymbol{k};\\
\boldsymbol{b}) & \boldsymbol{v}=(xy-az)\boldsymbol{i}+(a^2-y^2)\boldsymbol{j}+(yz-ax)\boldsymbol{k},\;\; a\in\mathbb{R}_+^*;\\
\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\varphi(y)\boldsymbol{j}-2z\varphi(y)\boldsymbol{k},\;\; \varphi\in C^1(\mathbb{R});\\
\boldsymbol{d}) & \boldsymbol{v}=(y-z)\boldsymbol{i}+(x-1)\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k};\\
\boldsymbol{e}) & \boldsymbol{v}=r^3\boldsymbol{r},\;\; r^2=x^2+y^2+z^2,\;\; \boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k};\\
\boldsymbol{f}) & \boldsymbol{v}=\Big(\dfrac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}\Big)\boldsymbol{i}+\Big(\dfrac{1}{z}-\dfrac{x}{y^2}\Big)\boldsymbol{j}+\Big(\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{z^2}\Big)\boldsymbol{k};\\
\boldsymbol{g}) & \boldsymbol{v}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}.
\end{array}$$

Problema 8.1.4. *Să se determine soluţia generală şi soluţia problemei Cauchy respective în următoarele cazuri:*

$$\textbf{\textit{a}})\quad y(x+2u)\frac{\partial u}{\partial x}-(x+u)^2\frac{\partial u}{\partial y}+yu=0,\;\; u(0,y)=y^2;$$

$$\textbf{\textit{b}})\quad xu\frac{\partial u}{\partial x}+yu\frac{\partial u}{\partial y}+xy=0,\;\; u(x,2)=x;$$

$$\textbf{\textit{c}})\quad 2xu\frac{\partial u}{\partial x}+2yu\frac{\partial u}{\partial y}=u^2-x^2-y^2,\;\; u(x,1)=x;$$

$$\textbf{\textit{d}})\quad x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u,\;\; u(1,y,z)=y+z;$$

$$\textbf{\textit{e}})\quad xu\frac{\partial u}{\partial x}+yu\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2+u^2,\;\; u(x,1)=x^2;$$

$$\textbf{\textit{f}})\quad (x+e^x)\frac{\partial u}{\partial x}+(y+e^y)\frac{\partial u}{\partial y}=u^2-e^{x+y};$$

$$\textbf{\textit{g}})\quad xy\frac{\partial u}{\partial x}-y^2\frac{\partial u}{\partial y}=x^2,\;\; u(x,x^2)=e^x.$$

Problema 8.1.5. *Să se determine soluţia* $u=u(r,\theta)$ *a problemei lui Dirichlet pentru discul cu centrul în origine şi rază* 3 *ştiind că pe frontiera acestuia este satisfacută condiţia* $u(3,\theta)=6\sin 2\theta$, *unde* $\theta\in[0,2\pi]$.

8.2 Exerciţii propuse cu indicaţii şi răspunsuri

Exerciţiul 8.2.1. *Să se reducă la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul doi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Folosind rezultatul stabilit să se determine soluţia generală a ecuaţiei.

Indicaţie. Ecuaţia este de tip hiperbolic. Se efectuează substituţia $\begin{cases}\xi=y+5x,\\ \eta=y-x.\end{cases}$ ■

Răspuns. Forma canonică a ecuaţiei este $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, iar soluţia sa generală a este $u(x,y)=f(y+5x)+g(y-x)$, unde f şi g sunt funcţii reale de variabilă reală de două ori diferenţiabile. ■

Exerciţiul 8.2.2. *Stabiliţi tipul ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

şi apoi aduceţi–o la forma canonică.

Indicaţie. Ecuaţia este de tip hiperbolic. Se va folosi substituţia $\begin{cases}\xi=\dfrac{x}{y},\\ \eta=xy.\end{cases}$ ■

Răspuns. $$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$ ■

Exerciţiul 8.2.3. *Specificaţi tipul şi apoi aduceţi la forma canonică ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\cos^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Indicaţie. Ecuaţia este de tip hiperbolic. Se efectuează substituţia $\begin{cases}\xi=\cos x+2x+y,\\ \eta=\cos x-2x+y.\end{cases}$ ■

Răspuns.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\xi+\eta}{\xi^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big)=0.$$
■

Exerciţiul 8.2.4. *Cercetaţi tipul ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul doi*

$$\mathrm{tg}^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\,\mathrm{tg}\, x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{tg}^3 x\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

şi apoi găsiţi expresia sa canonică.

Indicaţie. Ecuaţia este de tip parabolic. Se efectuează substituţia $\begin{cases}\xi=y\sin x,\\ \eta=y.\end{cases}$ ■

Răspuns.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$
■

Exerciţiul 8.2.5. *Să se stabilească tipul ecuaţiei*

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

şi apoi să se determine o formă canonică a sa.

Indicaţie. Ecuaţia este de tip parabolic. Se efectuează substituţia $\begin{cases}\xi=x^2+y^2,\\ \eta=x.\end{cases}$ ■

Răspuns.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{\eta}{\xi-\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$
■

Exerciţiul 8.2.6. *Determinaţi tipul ecuaţiei*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ y>0$$

şi apoi găsiţi–i forma canonică.

Indicaţie. Ecuaţia este de tip eliptic. Se efectuează substituţia $\begin{cases}\xi=2\sqrt{y},\\ \eta=x.\end{cases}$ ■

Răspuns.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0.$$
■

Exercițiul 8.2.7. *Specificați tipul și apoi aduceți la forma canonică ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ cu } x > 0.$$

Indicație. Ecuația este de tip eliptic. Se efectuează substituția $\begin{cases} \xi = y, \\ \eta = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}. \end{cases}$ ■

Răspuns.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$
■

Exercițiul 8.2.8. *Să se aducă la forma canonică ecuația*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 20\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Indicație. Ecuația este de tip eliptic. Se va efectua substituția $\begin{cases} \xi = y - 4x, \\ \eta = 2x. \end{cases}$ ■

Răspuns.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$
■

Exercițiul 8.2.9. *Să se integreze ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

unde $x > 0$, *iar* $y \neq 0$.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Se face substituția $\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{y^2}, \\ \eta = xy^2. \end{cases}$ ■

Răspuns. Soluția generală a ecuației este $u(x,y) = \sqrt[4]{xy^2}\,\varphi\Big(\dfrac{x}{y^2}\Big) + \psi(xy^2)$, unde φ și ψ sunt funcții reale arbitrare de două ori derivabile. ■

Exercițiul 8.2.10. *Să se determine soluția ecuației cu derivate parțiale de ordinul doi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

care satisface condițiile $u(x, \sin x) = x^4$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, \sin x) = x$.

Indicație. Ecuația este de tip hiperbolic. Utilizați substituția $\begin{cases} \xi = x - y + \sin x, \\ \eta = -x - y + \sin x. \end{cases}$ ■

Răspuns. $$u(x,y)=\frac{1}{2}\big[(x+y-\sin x)^4+(x-y+\sin x)^4\big]+\frac{1}{4}\big[(x-y+\sin x)^2-(x+y-\sin x)^2\big].$$ ■

Exerciţiul 8.2.11. *Studiaţi ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}-3\frac{\partial u}{\partial y}=e^x.$$

Indicaţie. Ecuaţia este de tip hiperbolic. Se face substituţia $\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x-y\end{cases}$ ■

Răspuns. $$u(x,y)=\varphi(x+y)+e^{-3y}\psi(x-y)+\frac{e^x}{4}.$$ ■

Exerciţiul 8.2.12. *Să se integreze ecuaţia* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial t}=2\cos(3x-2t).$

Indicaţie. Se caută o soluţie particulară de forma $u_p(x,t)=a\cos(3x-2t)+b\sin(3x-2t).$ ■

Răspuns. $$u_p(x,y)=\frac{4}{85}\sin(3x-2y)-\frac{18}{85}\cos(3x-2y).$$ ■

Exerciţiul 8.2.13. *Să se dtermine soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea*

$$4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2x\frac{\partial u}{\partial x}=2-3e^x.$$

Indicaţie. Ecuaţia este de tip hiperbolic şi se utilizează substituţia $\begin{cases}\xi=\dfrac{x}{y^2},\\ \eta=xy^2.\end{cases}$ ■

Răspuns. $$u(x,y)=\sqrt[4]{xy^2}\,\varphi\Big(\frac{x}{y^2}\Big)+\psi(xy^2).$$ ■

Exerciţiul 8.2.14. *Să se afle soluţia generală a ecuaţiei* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

Indicaţie. Ecuaţia este de tip parabolic şi se face substituţia $\begin{cases}\xi=y,\\ \eta=y-2x.\end{cases}$ ■

Răspuns. $$u(x,y)=e^{\frac{y}{2-x}}+\varphi(y)+\psi(y-2x).$$ ■

Exerciţiul 8.2.15. *Să se afle soluţia generală a ecuaţiei* $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-6\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}-4u=2e^{x-y}.$

Indicaţie. Ecuaţia este de tip parabolic. Se va efectua substituţia $\begin{cases} \xi = x + 2y, \\ \eta = y. \end{cases}$ ■

Răspuns. $$u(x,y) = e^y\varphi(x+2y) + e^{-4y}\psi(x+2y) - \tfrac{1}{2}e^{x-y}.$$ ■

8.3 Probleme cu condiţii iniţiale şi la limită

Exerciţiul 8.3.1. *Să se determine soluţia ecuaţiei* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ *care satisface condiţiile iniţiale*

$$\begin{cases} u(x,0) = 3\sin\dfrac{\pi x}{4}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

şi condiţile la limită

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(4,t) = 0. \end{cases}$$

Indicaţie. Este o problemă la limită cu condiţii iniţiale pentru ecuaţia coardei vibrante finită şi omogenă. ■

Răspuns. $$u(x,t) = 3\sin\frac{\pi x}{4}\cos\frac{\pi t}{2}.$$ ■

Exerciţiul 8.3.2. *Să se găsească soluţia ecuaţiei* $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ *care satisface condiţiile iniţiale*

$$u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2h}{l}x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{2h}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

şi condiţiile la limită $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$.

Indicaţie. Problemă la limită cu condiţii iniţiale pentru ecuaţia coardei vibrante finită şi omogenă. ■

Răspuns. $$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x\cos\frac{a(2k+1)\pi}{l}t.$$ ■

Exerciţiul 8.3.3. *Să se afle soluţia ecuaţiei* $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0,\ 0 \le x \le l$ *ştiind că*

$$u(x,0) = x^2 - 1, \quad \lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0.$$

Indicaţie. Problemă de propagare a căldurii într–o bară finită fără surse externe de încălzire. ■

Răspuns. $$u(x,t) = \frac{4l^2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\Big(\cos\frac{k\pi}{l}x\Big)\, e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}.$$ ■

Exerciţiul 8.3.4. *Să se dtermine acea soluţie a ecuaţiei* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *care satisface condiţiile iniţiale* $u(x,0) = 3x^2$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$.

Indicaţie. Se arată că soluţia generală a ecuaţiei este de forma

$$u(x,y) = f(x+y) + g(3x-y),$$

unde f şi g sunt funcţii reale de variabilă reală de două ori derivabile. Se găsesc apoi aceste funcţii impunând condiţiile din enunţ. ■

Răspuns. $$u(x,y) = 3x^2 + y^2.$$ ■

Exerciţiul 8.3.5. *Să se determine soluţia ecuaţiei* $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 7\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *cu condiţiile iniţiale* $u(0,y) = 9y^3$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = y^2$.

Indicaţie. Ecuaţia este de tip hiperbolic. Se efectuează substituţia $\begin{cases} \xi = \xi = 3x + y, \\ \eta = \eta = x + 2y \end{cases}$ ■

Răspuns. $$u(x,y) = \frac{1}{5}\big[(3x+y)^2 - (3x+y)^3 + \frac{3}{4}(x+2y)^3 - \frac{1}{4}(x+2y)^2\big].$$ ■

Exerciţiul 8.3.6. *Să se afle soluţia ecuaţiei* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx$, *cu condiţiile iniţiale* $\begin{cases} u(0,x) = x^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x. \end{cases}$

Indicaţie. Problemă de propagare a undelor elastice într–o bară infinită sub influenţa unei forţe externe. ■

Exerciţiul 8.3.7. *Să se determine soluţia ecuaţiei* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^x$ *cu condiţiile iniţiale*

$$\begin{cases} u(0,x) = \sin x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x + \cos x. \end{cases}$$

Indicaţie. Problemă de propagare a undelor elastice sub influenţa unei forţe externe staţionare. ■

Răspuns. $$u(x,t) = 3\sin x\cos t + xt - e^x + \frac{1}{2}(e^{x+t} + e^{x-t}).$$ ■

Exerciţiul 8.3.8. *Să se determine soluţia ecuaţiei*

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

unde $0 < x < 1$, *care satisface condiţiile iniţiale* $u(x,0) = \arcsin x$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 1.$

Indicaţie. Ecuaţia este de tip hiperbolic. Se efectuează schimbarea $\begin{cases} \xi = \arcsin x + y, \\ \eta = \arcsin x - y \end{cases}$ ■

Răspuns. $u(x,y) = \arcsin x + y.$ ■

Exerciţiul 8.3.9. *Să se determine soluţia generală şi soluţia problemei Cauchy indicate în cazul ecuaţiilor de mai jos:*

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u(0,y) = f(y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y);$

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x, \quad u(0,y) = f(y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y).$

Indicaţie. Ambele ecuaţii sunt ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea, prima de tip hiperbolic, iar a doua de tip paqrabolic. ■

Răspuns. **1.** Soluţia generală este $u(x,y) = \varphi(y-2x) + \psi(y+3x)$, unde φ şi ψ sunt funcţii arbitrare de două ori derivabile pe $\mathbb{R}$, iar soluţia problemei Cauchy respective este

$$u(x,y) = \frac{1}{5}\Big(3f(y-2x) + 2f(y+3x)\Big) + \frac{1}{5}\int_{y-2x}^{y+2x} g(t)dt.$$

2. $u(x,y) = \varphi(y-2x) + x\psi(y-2x) + e^x$ (soluţia generală);

$u(x,y) = f(y-2x) + xg(y-2x) + 2xf'(y-2x) + e^x - x - 1$ (soluţia problemei Cauchy). ■

Index de noţiuni

Bibliografie

[1] Adams, R. A. – *Calculus. A complete Course,* Fourth ed., Addison–Wesley, 1999

[2] Barbu, Gh. – *Matematici speciale. Note de curs,* Tipografia Universităţii din Piteşti, 1992.

[3] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. – *Mathematical Analysis, A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow 1986.

[4] Bitsadze, A. V. – *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers, Moscow 1980.

[5] Borislav, C. si alţii – *Matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[6] Brânzănescu, V., Stănăşilă, O. – *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicaţii*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[7] Bucur, Gh., Câmpu, E., Găină, S. – *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. III*, Editura Tehnică, Bucureşti 1967.

[8] Budak, B., M., Fomin, S., V. – *Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscou, 1973.

[9] Chiorescu, Gh. – *Matematici speciale. Culegere de aplicaţii în mecanică*, Editura "Gh. Asachi" Iaşi, 1995.

[10] Ciobanu, Gh., Chiorescu, Gh., Sava V. – *Capitole de matematici speciale*, Rotaprint, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi, Facultatea de Electronică şi Telecomunicaţii, Catedra de Matematică, 1998.

[11] Crstici, B. (coordonator) – *Matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[12] Craiu, M., Roşculeţ, M., N. – *Ecuaţii diferenţiale aplicative. Probleme de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[13] Crăciun, I. – *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, www.mec.tuiasi.ro/studenti.html/download, Iaşi 2011.

[14] Crăciun, I. – *Analiză matematică. Calcul integral*, Editura PIM, Iaşi 2007.

[15] Crăciun, I. – *Capitole de matematici speciale*, Editura PIM, Iaşi 2007.

[16] Courant, R., and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 and 2, New York: Wiley, 1953.

[17] Enescu, I., Sava, V. – *Matematici speciale*, Institutul Politehnic Iaşi, Facultatea de Mecanică, Rotaprint, 1981.

[18] Farlow, S. J. – *Partial differential equations for scientists and engineers*, Dover Publiications, Inc, New York, 1993

[19] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. – *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. II*, Editura Tehnică, Bucureşti 1966

[20] Haberman, R. – *Elementary Applied Partial Differential Equations, with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Second Edition, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1987.

[21] Jahnke, E. and Emde, F. – *Tables of Functions with Formulae and Curves.* Stechert, 1941; Dover, 1945.

[22] Haimovici, A. – *Ecuaţiile fizicii matematice şi elemente de calcul variaţional*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

[23] Keks, W.– *Complemente de matematici cu aplicaţii în tehnică,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1981.

[24] King, A. C., Billingham, J., and Otto, S. R. – *Differential Equations. Linear, Nonlinear, Ordinary, Partial*, Cambridge University Press, 2003.

[25] Mattheij, R.M. M., Rienstra, S. W., ten Thije Boonkkamp, J. H. M. – *Partial Differential Equations: Modeling, Analysis, Computation*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.

[26] Nicolescu, L., J., Stoka, M., I. – *Matematici pentru ingineri.* Vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[27] Olariu, V., Prepeliţă, V. – *Matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

[28] Olariu, V., Stănăşilă, T. – *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1982.

[29] Radu, C., Drăguşin, C., Drăguşin, L. – *Aplicaţii de algebră, geometrie şi matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

[30] Radomir, I., Ovesea, H. – *Matematici speciale,* Editura Albastră, Cluj Napoca, 2001.

[31] Rudner, V., Nicolescu, C. – *Probleme de matematici speciale,* Editura Didactică si Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[32] Smirnov, V. – *Cours de mathématiques supérieures, tome II*, Éditions Mir – Moscou, 1972.

[33] Smirnov, V. – *Cours de mathématiques supérieures, tome III, Deuxième partie*, Éditions Mir, Moscou, 1972.

[34] Stănăşilă, T. – *Analiza complexă şi calcul operaţional,* Editura Universităţii Politehnica din Bucureşti, 1985.

[35] Şabac, I. Gh. – *Matematici speciale*, Vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[36] Şabac, I. Gh. – *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[37] Şabac, I. Gh., Cocârlan, P., Stănăşilă, O., Topală, A. – *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[38] Teodorescu, N., Olariu, V. – *Ecuaţiile fizicii matematice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1970.

[39] Teodorescu, N., Olariu, V. – *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Volumul II *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1979.

[40] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. – *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company 1988.

[41] Trandafir, R. – *Probleme de matematică pentru ingineri,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.